CAPÍTULO

5 Análisis y diseño de vigas para flexión

Las vigas que soportan el sistema de grúas viajeras múltiples mostrado en la figura están sometidas a cargas transversales que provocan la flexión de las vigas. Los esfuerzos normales resultantes de tales cargas se estudiarán en este capítulo.

Generated by CamScanner from intsig.com

5.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo y la mayor parte del siguiente se dedicarán al análisis y diseño de *vigas*, es decir, de elementos estructurales que soportan cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento. Las vigas son comúnmente elementos prismáticos largos y rectos, como se observa en la fotografía de la página anterior. Las vigas de acero y de aluminio juegan un papel importante tanto en la ingeniería estructural como en la mecánica. Las vigas de madera se emplean, sobre todo, en la construcción residencial (figura 5.1). En la mayor parte de los casos, las cargas son perpendiculares al eje de la viga. Tales *cargas transversales* sólo causan flexión y corte en la viga. Cuando las cargas no se encuentran en ángulo recto con la viga, también producen cargas axiales en ella.

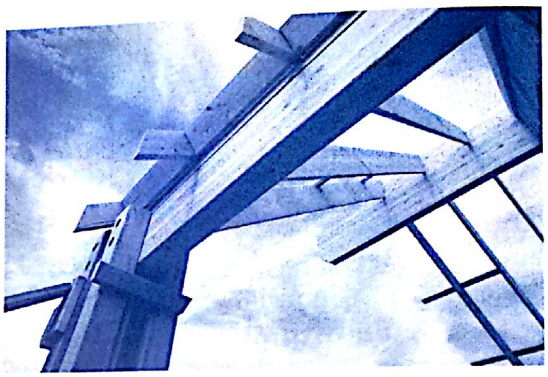
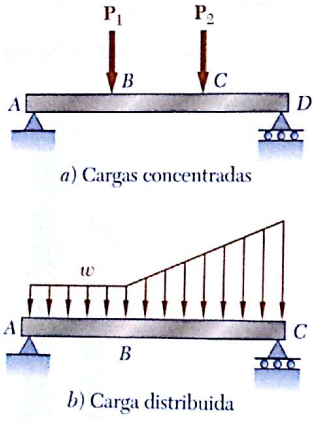


Figura 5.1



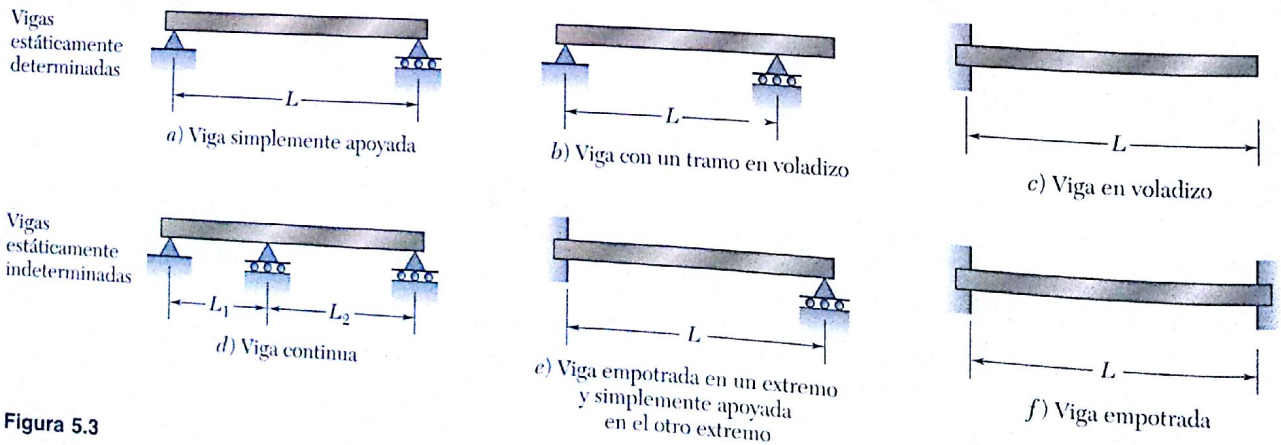
a) Cargas concentradas

b) Carga distribuida

Figura 5.2

La carga transversal de una viga puede consistir en *cargas concentradas* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,..., expresadas en newtons, libras o sus múltiplos, kilonewtons y kips (figura 5.2*a*), en una *carga distribuida w*, expresada en N/m, kN/m, lb/ft o kips/ft (figura 5.2*b*), o una combinación de ambas. Cuando la carga *w* por unidad de longitud tiene un valor constante a lo largo de parte de la viga (como entre *A* y *B* en la figura 5.2*b*), se dice que la carga está *uniformemente distribuida* en dicha parte de la viga.

Las vigas se clasifican de acuerdo con la manera en la que se encuentran apoyadas. Varios tipos de vigas utilizadas con frecuencia se presentan en la figura 5.3. La distancia *L* mostrada en distintas partes de la figura se denomina el *claro*. Note que las reacciones en los soportes de las vigas en las partes *a*, *b* y *c* de la figura involucran un total de sólo tres incógnitas y, por



a) Viga simplemente apoyada

b) Viga con un tramo en voladizo

c) Viga en voladizo

d) Viga continua

e) Viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro extremo

f) Viga empotrada

Figura 5.3

Generated by CamScanner from intsig.com

lo tanto, pueden determinarse empleando métodos estáticos. Tales vigas se conocen como *estáticamente determinadas* y se estudiarán en este capítulo y en el siguiente. Por otra parte, las reacciones en los apoyos de las vigas en las partes *d*, *e* y *f* de la figura 5.3 involucran más de tres incógnitas y no pueden determinarse únicamente por métodos estáticos. Las propiedades de las vigas con respecto a su resistencia a las deformaciones debe tomarse en cuenta. Tales vigas se denominan *estáticamente indeterminadas* y su explicación se aplazará hasta el capítulo 9, donde se estudiarán las deformaciones en vigas.

En ocasiones dos o más vigas se conectan por bisagras para formar una estructura continua única. Dos ejemplos de vigas con bisagra en un punto *H* se muestran en la figura 5.4. Se observará que las reacciones en los apoyos involucran cuatro incógnitas y no pueden determinarse del diagrama de cuerpo libre del sistema de dos vigas. Pueden obtenerse, sin embargo, considerando el diagrama de cuerpo libre de cada viga por separado; se encuentran involucradas seis incógnitas (incluyendo dos componentes de fuerza en la bisagra), y se encuentran disponibles seis ecuaciones.

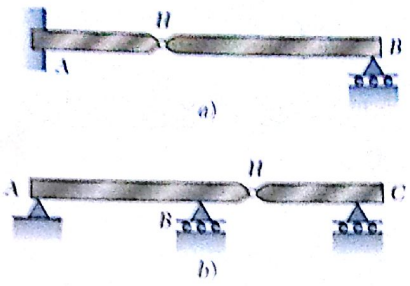


Figura 5.4

Se mostró en la sección 4.1 que, si se efectúa un corte en un punto *C* de una viga en voladizo que soporta una carga concentrada **P** en su extremo (figura 4.6), se encuentra que las fuerzas internas en el corte consisten de una fuerza cortante **P′** igual y opuesta a la carga **P** y en un momento flector **M** cuyo momento es igual al momento de **P** alrededor de *C*. Una situación análoga prevalece para otros tipos de apoyos y cargas. Considere, por ejemplo, una viga simplemente apoyada *AB* que porte dos cargas concentradas y una carga uniformemente distribuida (figura 5.5*a*). Para determinar las fuerzas internas en un corte a través del punto *C*, primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de toda la viga para obtener las reacciones en los apoyos (figura 5.5*b*). Haciendo un corte a través de *C*, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de *AC* (figura 5.5*c*), del que se obtiene la fuerza cortante **V** y el par flector **M**.

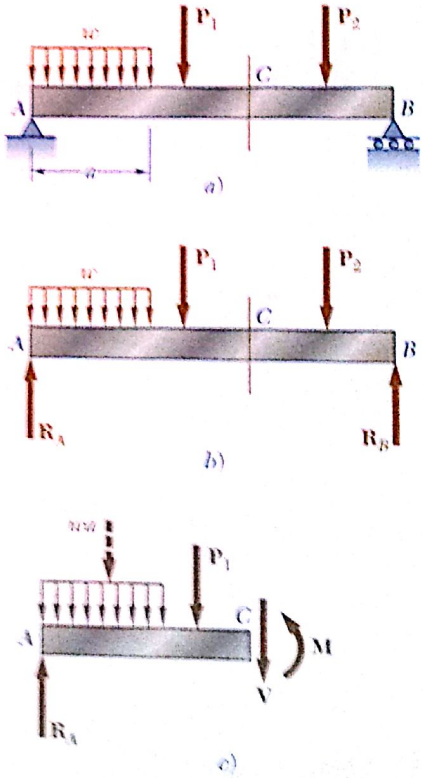


Figura 5.5

El par flector **M** crea *esfuerzos normales* en la sección transversal, mientras que la fuerza cortante **V** produce *esfuerzos cortantes* en dicha sección. En la mayoría de los casos el criterio dominante en el diseño por resistencia de una viga es el valor máximo del esfuerzo normal en la viga. La determinación de los esfuerzos normales en una viga será el tema de este capítulo, mientras que los esfuerzos cortantes se analizarán en el capítulo 6.

Debido a que la distribución de los esfuerzos normales en una sección dada depende sólo del valor del momento flector *M* en dicha sección y de la geometría de la sección,† las fórmulas de flexión elástica deducidas en la sección 4.4 pueden utilizarse para determinar el esfuerzo máximo, así como el esfuerzo en cualquier punto dado, en la sección. Se escribe‡

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} \qquad \sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{5.1, 5.2}$$

donde *I* es el momento de inercia de la sección transversal con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano del par, *y* es la distancia desde la super-

†Se supone que la distribución de los esfuerzos normales en una sección transversal dada no se ve afectada por las deformaciones causadas por los esfuerzos cortantes. Esta hipótesis será verificada en la sección 6.5.

‡Recuerde que en la sección 4.2 se vio que *M* puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la concavidad de la viga en el punto considerado es hacia arriba o hacia abajo. Así, en el caso considerado aquí de una carga transversal, el signo de *M* puede variar a lo largo de la viga. Como, por otra parte, σ_m es una cantidad positiva, el valor absoluto de *M* se utiliza en la ecuación (5.1).

Generated by CamScanner from intsig.com

ficie neutra y c es el valor máximo de dicha distancia (figura 4.13). También se recuerda, de la sección 4.4, que introduciendo el módulo de sección elástico $S = I/c$ de la viga, el valor máximo σ_m del esfuerzo normal en la sección puede expresarse como

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} \tag{5.3}$$

El hecho de que σ_m sea inversamente proporcional a S subraya la importancia de seleccionar vigas con un módulo de sección grande. Los módulos de sección de varios perfiles de acero laminado se dan en el apéndice C, en tanto que el módulo de sección de un perfil rectangular puede expresarse, como se mostró en la sección 4.4, como

$$S = \tfrac{1}{6}bh^2 \tag{5.4}$$

donde b y h son, respectivamente, el ancho y el espesor de la sección transversal.

La ecuación (5.3) también muestra que, para una viga con sección transversal uniforme, σ_m es proporcional a $|M|$. Por lo tanto, el valor máximo del esfuerzo normal en la viga ocurre en la sección donde $|M|$ es más grande. De lo anterior, se deduce que una de las partes más importantes del diseño de una viga para una condición dada de carga es la localización y la magnitud del momento flector máximo.

Esta tarea se facilita si se dibuja un *diagrama de momento flector*, es decir, si el valor del momento flector M se determina en varios puntos de la viga y se grafica contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Y se facilita aún más si se dibuja un *diagrama de cortante* al mismo tiempo que se grafica la fuerza cortante V contra x.

La convención de signos utilizada para registrar los valores de la fuerza cortante y del momento flector se estudiará en la sección 5.2. Los valores de V y M serán obtenidos, entonces, en varios puntos de la viga dibujando diagramas de cuerpo libre de porciones sucesivas de ella. En la sección 5.3, las relaciones entre carga, cortante y momento flector se deducirán y utilizarán para obtener los diagramas de cortante y de momento flector. Este enfoque facilita la obtención del máximo valor absoluto del momento flector y, por lo tanto, de la determinación del esfuerzo normal máximo en la viga.

En la sección 5.4 se aprenderá a diseñar una viga para la flexión, es decir, una viga en la que su momento normal máximo no exceda el valor permisible. Como se indicó antes, éste es el criterio dominante en el diseño de una viga.

Otro método para la determinación de los valores máximos del cortante y del momento flector, basado en la expresión de V y de M en términos de *funciones de singularidad*, se analizará en la sección 5.5. Este enfoque se presta bien al uso de computadoras y se explicará con mayor profundidad en el capítulo 9 para facilitar la obtención de la pendiente y de la deflexión en vigas.

Finalmente, el diseño de *vigas no prismáticas*, esto es, vigas con sección transversal variable, se examinará en la sección 5.6. Seleccionando la forma y el tamaño de la sección transversal variable de tal manera que el módulo de sección elástico $S = I/c$ varíe a lo largo de la longitud de la viga de la misma manera que $|M|$, es posible diseñar vigas para las que el esfuerzo normal máximo en cada sección sea igual al esfuerzo permisible del material. Tales vigas se conocen como vigas de *resistencia constante*.

Generated by CamScanner from intsig.com

5.2 DIAGRAMAS DE CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR

Como se indicó en la sección 5.1, la determinación de los valores absolutos máximos del cortante y del momento flector en una viga se facilitan mucho si V y M se grafican contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Además, como se verá en el capítulo 9, el conocimiento de M como una función de x es esencial para la determinación de la flexión de una viga.

En los ejemplos y problemas modelo de esta sección, los diagramas de cortante y de momento flector se obtendrán determinando los valores de V y de M en puntos selectos de la viga. Estos valores se calcularán de la manera habitual, es decir, efectuando un corte a través del punto donde deben ser determinados (figura 5.6*a*) y considerando el equilibrio de la porción de viga localizada en cualquiera de los lados de la sección (figura 5.6*b*). Ya que las fuerzas cortantes **V** y **V′** tienen sentidos opuestos, el registrar el corte en el punto C con una flecha hacia arriba o hacia abajo no tendría significado, a menos que se indicase al mismo tiempo cuál de los cuerpos libres AC y CB se está considerando. Por esta razón, el corte V se registrará con un signo: un *signo positivo* si las fuerzas cortantes se dirigen como se observa en la figura 5.6*b*, y un *signo negativo* en el caso contrario. Una convención similar se aplicará al momento flector M. Se considerará positivo si los pares flectores se dirigen como se muestra en dicha figura, y negativos en el caso contrario.† Resumiendo las convenciones de signos presentados, se enuncia:

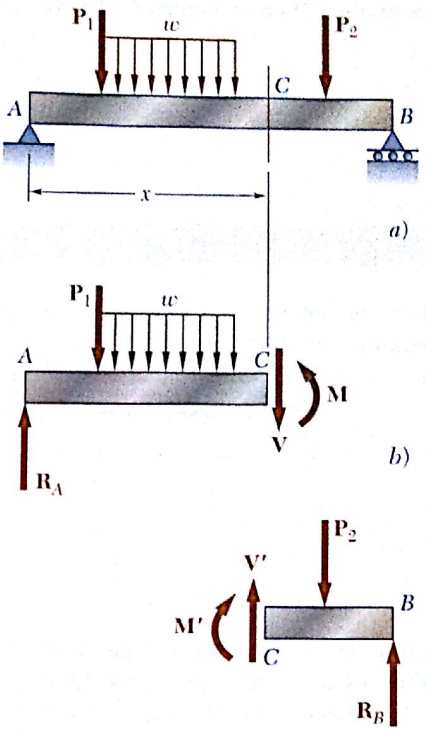


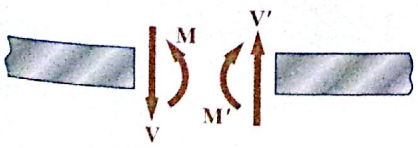
Figura 5.6

El cortante V y el momento flector M en un punto dado de una viga se consideran positivos cuando las fuerzas internas y los pares que actúan en cada porción de la viga se dirigen como se indica en la figura 5.7a.

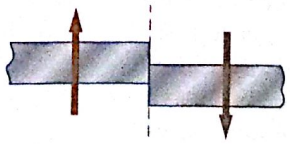
Estas convenciones pueden recordarse más fácilmente si se advierte que

1. *El cortante en cualquier punto dado de una viga es positivo cuando las fuerzas* **externas** *(cargas y reacciones) que actúan sobre la viga tienden a cortar la viga en ese punto como se indica en la figura 5.7b.*
2. *El momento flector en cualquier punto dado de una viga es positivo cuando las fuerzas* **externas** *que actúan sobre la viga tienden a flexionar la viga en ese punto como se muestra en la figura 5.7c.*

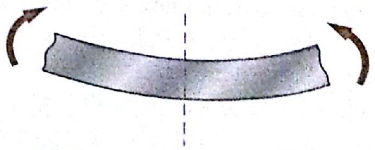
Otra forma de recordar las conversiones es advertir que la situación descrita en la figura 5.7, en la que los valores del cortante y del momento flector son positivos, es precisamente la situación que ocurre en la mitad izquierda de una viga simplemente apoyada que lleve una carga única concentrada en su centro. Este caso particular se analiza por completo en el siguiente ejemplo.



a) Fuerzas internas (corte positivo y momento flector positivo)



b) Efecto de las fuerzas externas (corte positivo)



c) Efecto de las fuerzas externas (momento flector positivo)

Figura 5.7

†Advierta que esta convención es la misma que se utilizó anteriormente en la sección 4.2.

Generated by CamScanner from intsig.com

EJEMPLO 5.01

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para una viga simplemente apoyada AB con claro L sometida a una carga única concentrada **P** en su centro C (figura 5.8).

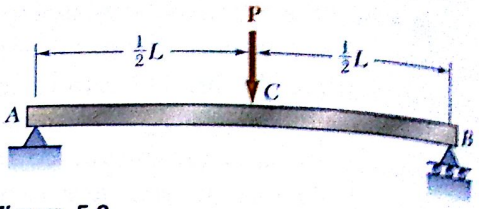
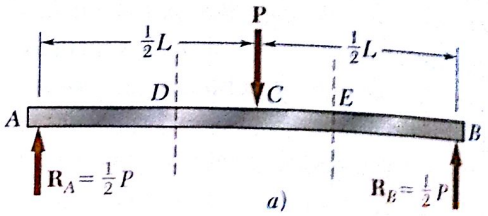
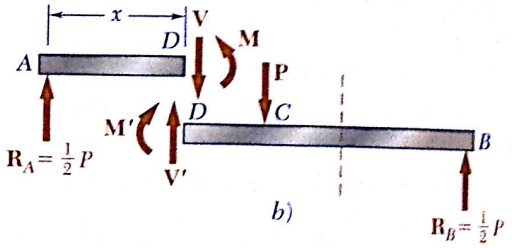


Figura 5.8

Primero se obtienen las reacciones en los soportes a partir del diagrama de cuerpo libre de la viga entera (figura 5.9*a*); se encuentra que la magnitud de cada reacción es igual a $P/2$.



A continuación se corta la viga en un punto D entre A y C y se dibujan los diagramas de cuerpo libre de AD y de DB (figura 5.9*b*). *Suponiendo que el corte y el momento flector son positivos*, se dirigen las fuerzas internas **V** y **V′** y los pares internos **M** y **M′** como se indica en la figura 5.7*a*. Considerando el cuerpo libre AD y escribiendo que la suma de las componentes verticales y que la suma de momentos alrededor de D de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son cero, se encuentra que $V = +P/2$ y que $M = +Px/2$. Tanto el cortante como el momento flector son, por lo tanto, positivos. Esto puede verificarse observando que la reacción en A tiende a cortar y a flexionar la viga en D como se indica en las figuras 5.7*b* y *c*. Ahora se grafican V y M entre A y C (figuras 5.9*d* y *e*); el cortante tiene un valor constante $V = P/2$ mientras que el momento flector aumenta linealmente desde $M = 0$ en $x = 0$ hasta $M = PL/4$ en $x = L/2$.



Cortando ahora la viga en el punto E entre C y B y considerando el diagrama de cuerpo libre EB (figura 5.9*c*) se escribe que la suma de los componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a E actuando en el cuerpo libre son cero. Se obtiene $V = -P/2$ y $M = P(L - x)/2$. El cortante es, por lo tanto, negativo y el momento flector, positivo. Esto puede verificarse observando que la reacción en B flexiona a la viga en E como se indica en la figura 5.7*c* pero que tiende a cortarla en una manera opuesta a la mostrada en la figura 5.7*b*. Ahora es posible completar los diagramas de cortante y de momento flector de las figuras 5.9*d* y *e*; el corte tiene un valor constante $V = -P/2$ entre C y B, mientras que el momento flector disminuye linealmente desde $M = PL/4$ en $x = L/2$ hasta $M = 0$ en $x = L$.

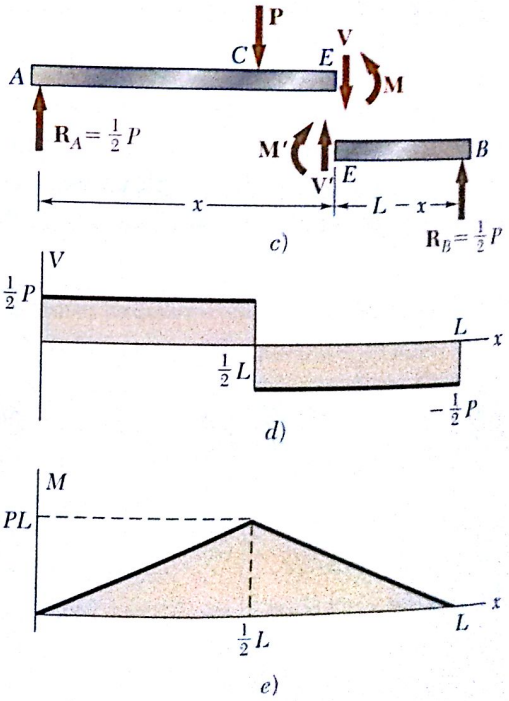


Figura 5.9

Generated by CamScanner from intsig.com

Advierta que, del ejemplo anterior, cuando una viga se somete únicamente a cargas concentradas, el cortante es constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre las cargas. En tales situaciones, por lo tanto, es posible dibujar con facilidad los diagramas de cortante y de momento flector, una vez que los valores de V y de M se han obtenido en secciones seleccionadas justo a la izquierda y justo a la derecha de los puntos donde las cargas y las reacciones se aplican (véase problema modelo 5.1).

EJEMPLO 5.02

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para una viga AB en voladizo con un claro L que soporta una carga uniformemente distribuida w (figura 5.10).

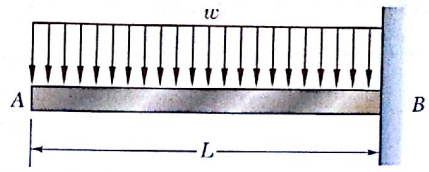
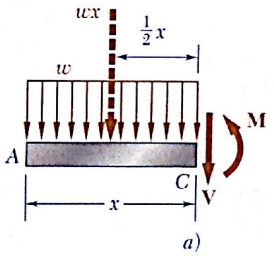


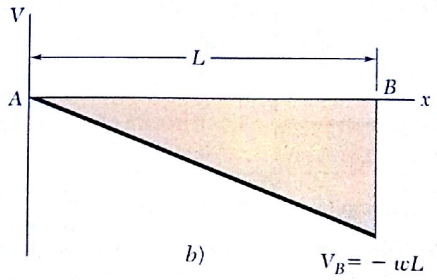
Figura 5.10

Se corta la viga en un punto C entre A y B y se dibuja el diagrama de cuerpo libre de AC (figura 5.11*a*) dirigiendo **V** y **M** como se muestra en la figura 5.7*a*. Denotando con x la distancia de A a C y reemplazando la carga distribuida sobre AC por su resultante wx aplicada en el punto medio de AC, se escribe



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -wx - V = 0 \qquad V = -wx$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad wx\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \qquad M = -\frac{1}{2}wx^2$$



Se observa que el diagrama de cortante se representa con una línea recta oblicua (figura 5.11*b*) y el diagrama de momento flector con una parábola (5.11*c*). Los valores máximos de V y M ocurren, ambos, en B, donde se tiene

$$V_B = -wL \qquad M_B = -\tfrac{1}{2}wL^2$$

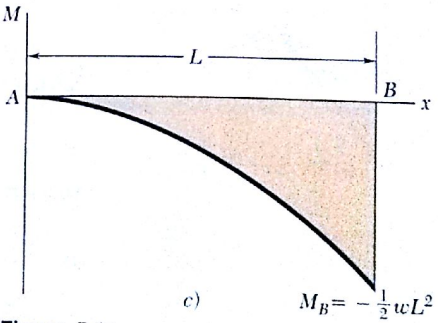
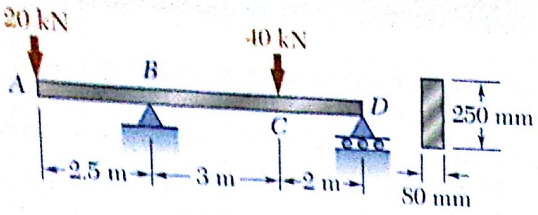


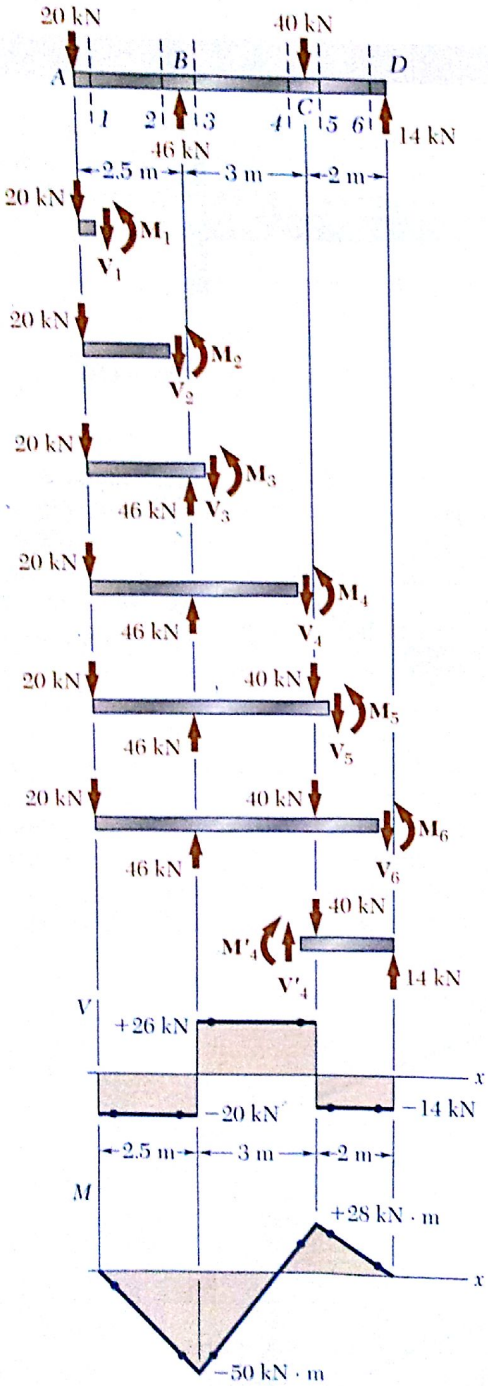
Figura 5.11

Generated by CamScanner from intsig.com



PROBLEMA MODELO 5.1

Para la viga de madera cargada que muestra la figura, dibuje los diagramas de cortante y de momento flector y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.



SOLUCIÓN

Reacciones. Considerando la viga entera como cuerpo libre, se encuentra que

$$\mathbf{R}_B = 40\ \text{kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14\ \text{kN} \uparrow$$

Diagramas de cortante y de momento flector. Primero se determinan las fuerzas internas justo a la derecha de la carga de 20 kN en A. Considerando al muñón de viga a la izquierda del corte *1* como un cuerpo libre y suponiendo que V y M son positivas (de acuerdo con la convención estándar), se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20\ \text{kN} - V_1 = 0 \quad V_1 = -20\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \quad (20\ \text{kN})(0\ \text{m}) + M_1 = 0 \quad M_1 = 0$$

A continuación se considera como cuerpo libre la porción de la viga a la izquierda del corte 2 y se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20\ \text{kN} - V_2 = 0 \quad V_2 = -20\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad (20\ \text{kN})(2.5\ \text{m}) + M_2 = 0 \quad M_2 = -50\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

El cortante y el momento flector en los cortes *3*, *4*, *5* y *6* se determinan de manera similar a los diagramas de cuerpo libre que se muestran. Se obtiene

$$V_3 = +26\ \text{kN} \qquad M_3 = -50\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_4 = +26\ \text{kN} \qquad M_4 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_5 = -14\ \text{kN} \qquad M_5 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_6 = -14\ \text{kN} \qquad M_6 = 0$$

Para las últimas secciones, los resultados pueden obtenerse más fácilmente considerando como cuerpo libre la porción de la viga a la derecha del corte. Por ejemplo, para la porción de la viga a la derecha del corte *4*, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V_4 - 40\ \text{kN} + 14\ \text{kN} = 0 \quad V_4 = +26\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_4 = 0: \quad -M_4 + (14\ \text{kN})(2\ \text{m}) = 0 \quad M_4 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Con estos datos, es posible graficar los seis puntos mostrados en los diagramas de cortante y de momento flector. Como se indicó anteriormente en esta sección, el cortante tiene valor constante entre cargas concentradas, y el momento flector varía linealmente; se obtienen, por lo tanto, los diagramas de cortante y de momento flector mostrados.

Esfuerzo normal máximo. Ocurre en B, donde $|M|$ es máximo. Se utiliza la ecuación (5.4) para obtener el módulo de sección

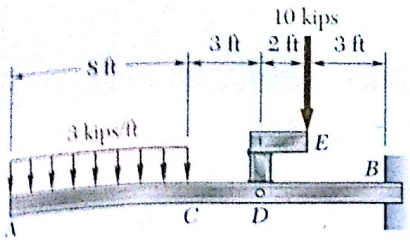
$$S = \tfrac{1}{6} bh^2 = \tfrac{1}{6}(0.080\ \text{m})(0.250\ \text{m})^2 = 833.33 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Sustituyendo este valor y $|M| = |M_B| = 50 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}$ en la ecuación (5.3):

$$\sigma_m = \frac{|M_B|}{S} = \frac{(50 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m})}{833.33 \times 10^{-6}} = 60.00 \times 10^6\ \text{Pa}$$

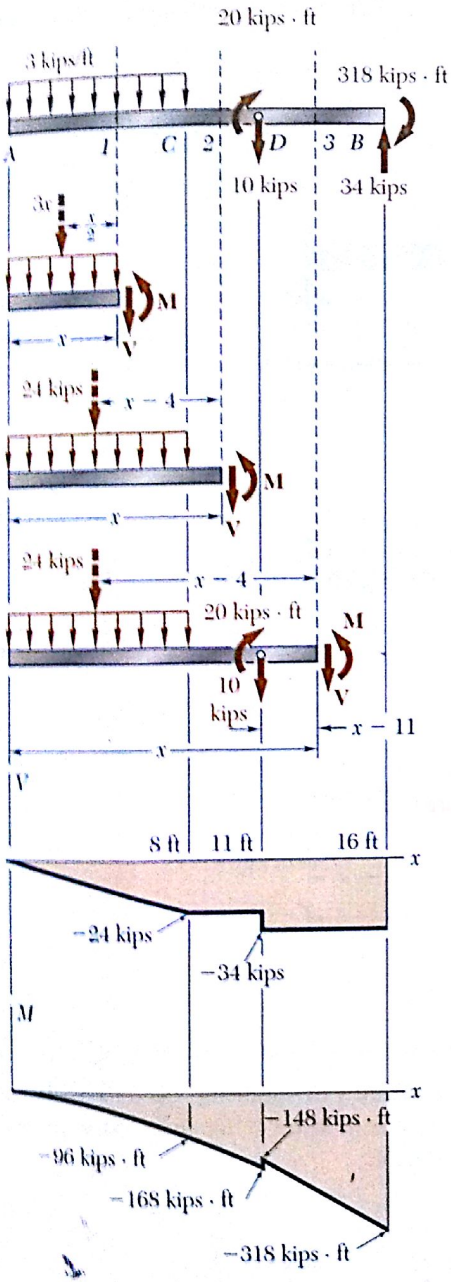
Esfuerzo normal máximo en la viga = 60.0 MPa ◀

Generated by CamScanner from intsig.com



PROBLEMA MODELO 5.2

La estructura mostrada en la figura consiste de una viga W10 × 112 de acero laminado AB y de dos elementos cortos soldados y añadidos a la viga. *a)* Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y la carga dada. *b)* Determine el esfuerzo normal máximo en las secciones justo a la izquierda y justo a la derecha del punto D.



SOLUCIÓN

Carga equivalente de la viga. La carga de 10 kips se reemplaza por un sistema equivalente de fuerza-par en D. La reacción en B se determina considerando la viga como un cuerpo libre.

a) Diagramas de cortante y de momento flector

De A a C. Se determinan las fuerzas internas a una distancia x del punto A considerando la porción de la viga a la izquierda del corte *1*. La parte de la carga distribuida que actúa sobre el cuerpo libre se reemplaza por su resultante, y se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -3x - V = 0 \qquad V = -3x \text{ kips}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \qquad 3x\left(\tfrac{1}{2}x\right) + M = 0 \qquad M = -1.5x^2 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$

Como el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura puede utilizarse para todos los valores de x menores de 8 ft, las expresiones obtenidas para V y M son válidas en la región $0 < x < 8$ ft.

De C a D. Considerando la porción de la viga a la izquierda del corte 2 y reemplazando nuevamente la carga distribuida por su resultante, se obtiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -24 - V = 0 \qquad V = -24 \text{ kips}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \qquad 24(x - 4) + M = 0 \qquad M = 96 - 24x \quad \text{kip} \cdot \text{ft}$$

Estas expresiones son válidas en la región 8 ft $< x <$ 11 ft.

De D a B. Utilizando la posición de la viga a la izquierda del corte *3*, se obtiene para la región 11 ft $< x <$ 16 ft

$$V = -34 \text{ kips} \qquad M = 226 - 34x \quad \text{kip} \cdot \text{ft}$$

Ahora es posible graficar los diagramas de cortante y de momento flector para toda la viga. Se advierte que el par con momento 20 kips · ft aplicado en el punto D introduce una discontinuidad en el diagrama de momento flector.

b) Máximo esfuerzo normal a la izquierda y a la derecha del punto *D*.

Del apéndice C se encuentra que para un perfil W10 × 112 de acero laminado, $S = 126$ in.^{3} alrededor del eje *X-X*.

A la izquierda de D: Se tiene $|M| = 168$ kips · ft $= 2\,016$ kips · in. Sustituyendo $|M|$ y S en la ecuación (5.3), se escribe

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{2\,016 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{126 \text{ in.}^3} = 16.00 \text{ ksi} \qquad \sigma_m = 16.00 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

A la derecha de D: Se tiene $|M| = 148$ kips · ft $= 1\,776$ kips · in. Sustituyendo $|M|$ y S en la ecuación (5.3), se tiene

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{1\,776 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{126 \text{ in.}^3} = 14.10 \text{ ksi} \qquad \sigma_m = 14.10 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

Generated by CamScanner from intsig.com

PROBLEMAS

5.1 a 5.6 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, *a*) dibuje los diagramas de cortante y de momento flector, *b*) determine las ecuaciones de las curvas de cortante y de momento flector.

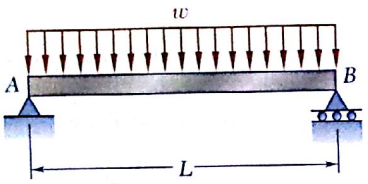


Figura P5.1

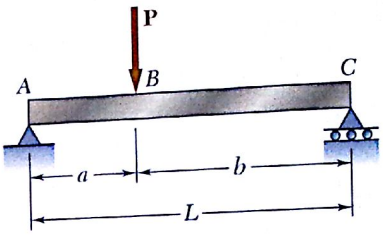


Figura P5.2

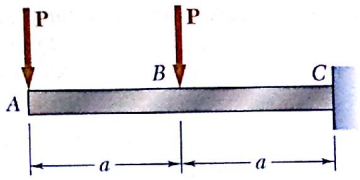


Figura P5.3

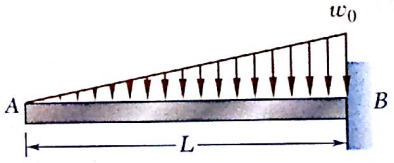


Figura P5.4

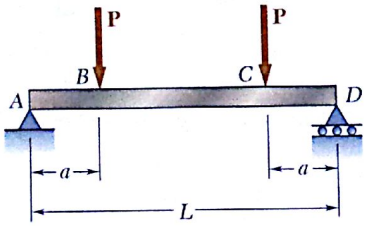


Figura P5.5

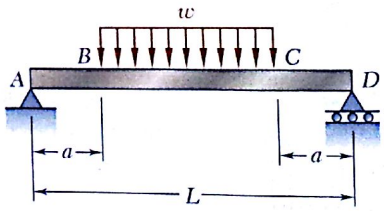


Figura P5.6

5.7 y 5.8 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.

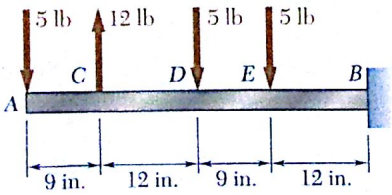


Figura P5.7

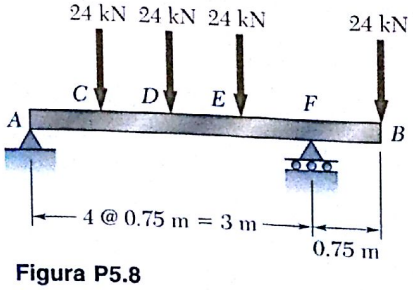


Figura P5.8

Generated by CamScanner from intsig.com

5.9 y 5.10 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas mostradas en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.

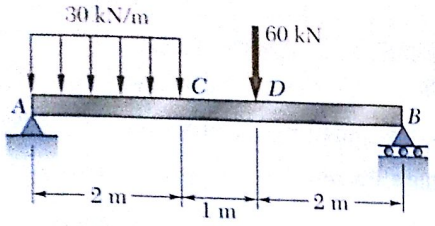


Figura P5.9

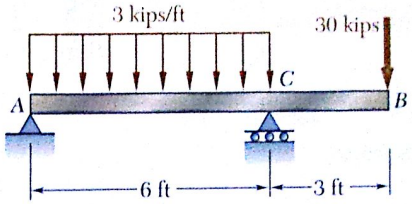


Figura P5.10

***5.11* y 5.12** Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.

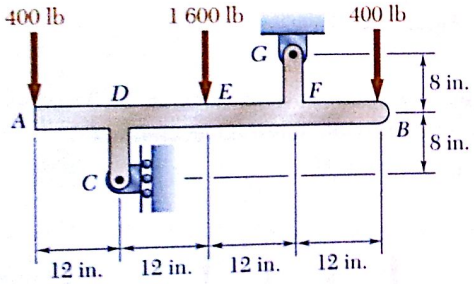


Figura *P5.11*

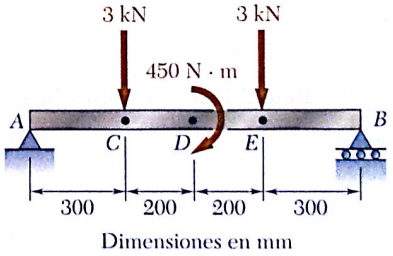


Figura P5.12

5.13 y *5.14* Si se supone que la reacción del suelo está uniformemente distribuida, dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga *AB* y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.

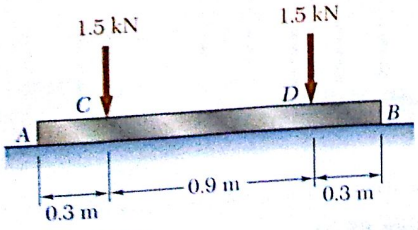


Figura P5.13

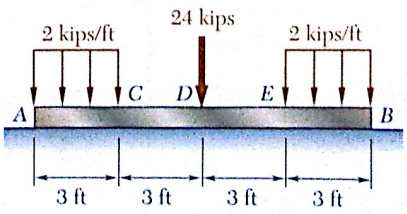


Figura *P5.14*

Generated by CamScanner from intsig.com

5.15 y ***5.16*** Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión sobre un corte transversal en *C*.

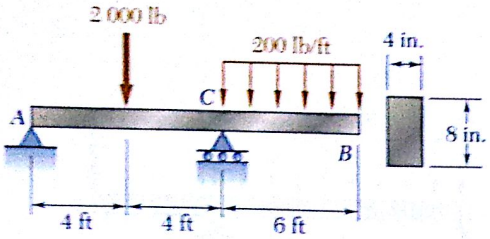


Figura P5.15

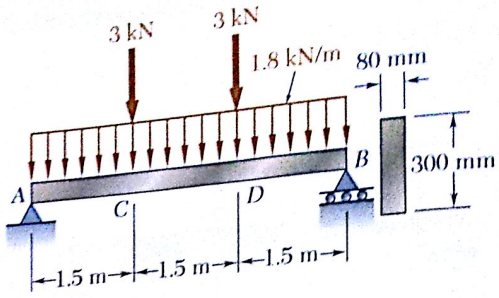


Figura *P5.16*

5.17 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión sobre un corte transversal en *C*.

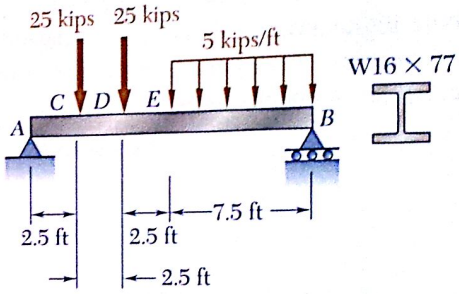


Figura P5.17

5.18 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión sobre la sección *a*-*a*.

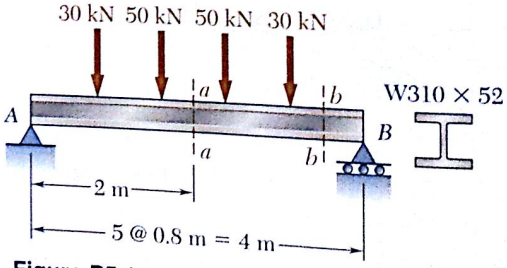


Figura P5.18

5.19 y **5.20** Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión sobre un corte transversal en *C*.

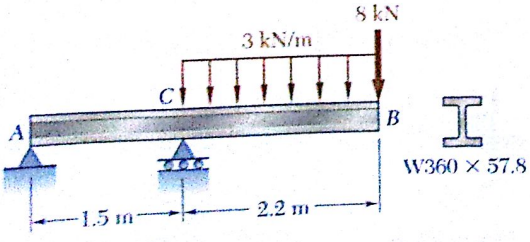


Figura *P5.19*

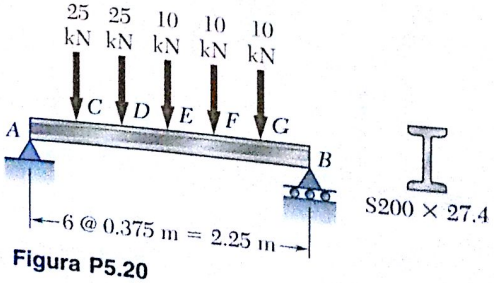


Figura P5.20

Generated by CamScanner from intsig.com

5.21 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

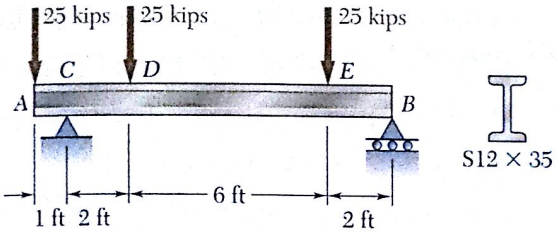


Figura P5.21

5.22 y ***5.23*** Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas mostradas en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

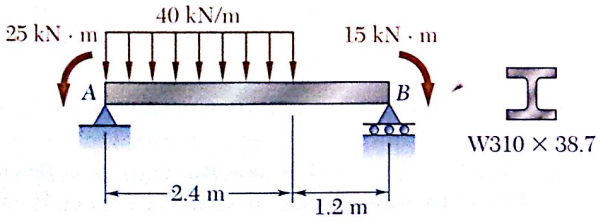


Figura P5.22

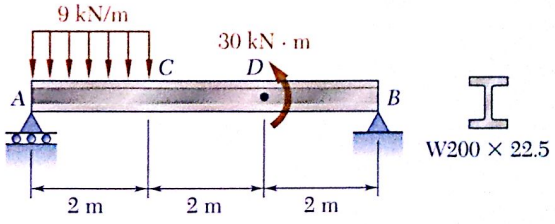


Figura *P5.23*

5.24 y **5.25** Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas mostradas en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

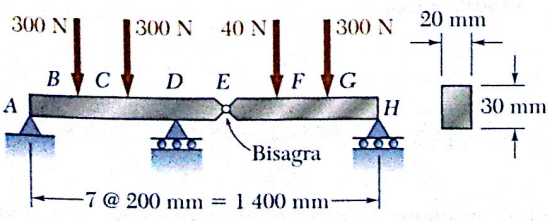


Figura P5.24

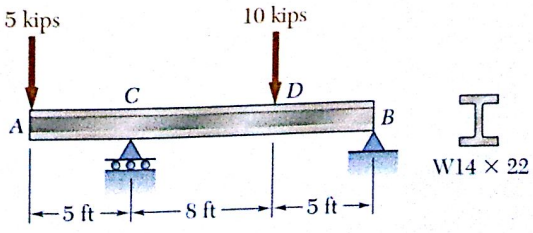


Figura P5.25

Generated by CamScanner from intsig.com

5.26 Si se sabe que $W = 12$ kN, dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga AB y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

5.27 Determine *a*) la magnitud del contrapeso W tal que el máximo valor absoluto del momento flector en la viga sea lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente debido a la flexión. (*Sugerencia*: Dibuje el diagrama de momento flector e iguale los valores absolutos de los máximos momentos flectores, positivo y negativo, obtenidos.)

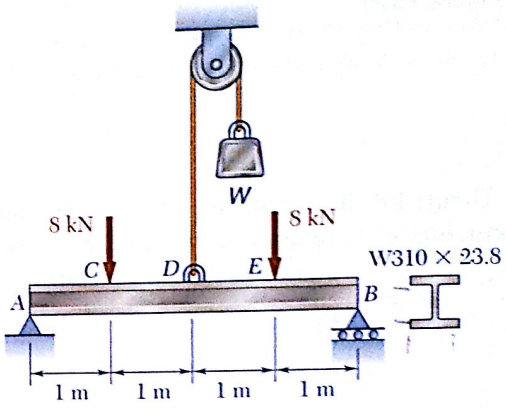


Figura *P5.26* y P5.27

5.28 Si se sabe que $P = Q = 480$ N, determine *a*) la distancia a para la cual el máximo valor absoluto del momento flector sobre la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente debido a la flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27.)

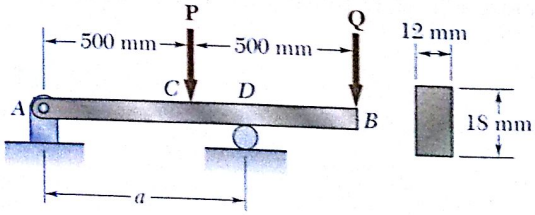


Figura P5.28

5.29 Retome el problema 5.28, y ahora suponga que $P = 480$ N y $Q = 320$ N.

Generated by CamScanner from intsig.com

5.30 Determine *a*) la distancia *a* para la cual el máximo valor absoluto del momento flector sobre la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente debido a la flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27.)

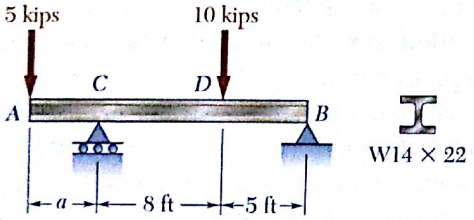


Figura *P5.30*

5.31 Determine *a*) la distancia *a* para la cual el máximo valor absoluto del momento flector sobre la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente debido a la flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27.)

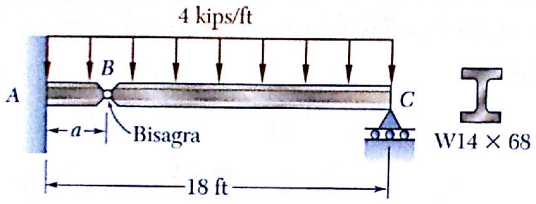


Figura P5.31

5.32 Una varilla sólida de acero con diámetro *d* está apoyada como se indica en la figura. Si se sabe que para el acero $\gamma = 490$ lb/ft^3, determine el diámetro *d* mínimo que puede utilizarse si el esfuerzo normal debido a la flexión no debe exceder 4 ksi.

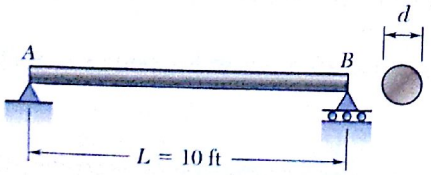


Figura P5.32

5.33 Una barra sólida de acero tiene una sección cuadrada de lado *b* y está apoyada como se observa en la figura. Si se sabe que para el acero $\rho = 7\,860$ kg/m^3, determine la dimensión *b* de la barra para la cual el esfuerzo normal máximo debido a la flexión es *a*) 10 MPa, *b*) 50 MPa.

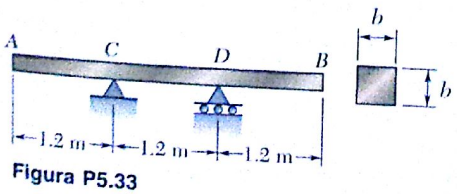
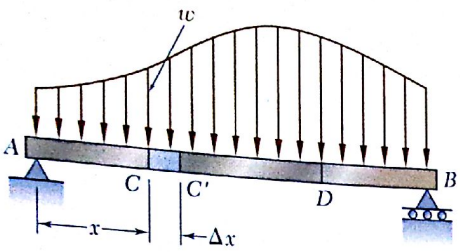
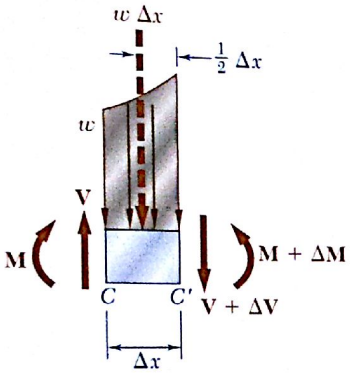


Figura P5.33

Generated by CamScanner from intsig.com



a)



b)

Figura 5.12

5.3 RELACIONES ENTRE LA CARGA, EL CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR

Cuando una viga lleva más de dos o tres cargas concentradas, o cuando lleva cargas distribuidas, el método explicado en la sección 5.2 para graficar el cortante y el momento flector resulta muy complicado. La construcción del diagrama de cortante y, especialmente, del diagrama de momento flector se facilitará en gran medida si se toman en consideración ciertas relaciones que existen entre la carga, el cortante y el momento flector.

Considere una viga simplemente apoyada AB que lleva una carga distribuida w por unidad de longitud (figura 5.12*a*), y sean C y C' dos puntos en la viga a una distancia Δx uno del otro. El cortante y el momento flector en C se denotarán por V y por M, respectivamente, y se supondrán positivos; el cortante y el momento flector en C' se denotarán por $V + \Delta V$ y por $M + \Delta M$.

Ahora se desprende la porción de viga CC' y se dibuja su diagrama de cuerpo libre (figura 5.12*b*). Las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre incluyen una carga de magnitud $w\,\Delta x$ y fuerzas y pares internos en C y en C'. Ya que el corte y el momento flector se han supuesto positivos, las fuerzas y pares se dirigirán como se indica en la figura.

Relaciones entre la carga y el cortante. Escribiendo que la suma de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CC' son cero, se tiene que

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad V - (V + \Delta V) - w\,\Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w\,\Delta x$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre Δx y haciendo que Δx se aproxime a cero, se tiene que

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{5.5}$$

La ecuación (5.5) indica que, para una viga cargada como se muestra en la figura 5.12*a*, la pendiente dV/dx de la curva de cortante es negativa; el valor numérico de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en dicho punto.

Integrando la ecuación (5.5) entre los puntos C y D, se escribe

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx \tag{5.6}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{5.6'}$$

Advierta que este resultado también podría haberse obtenido considerando el equilibrio de la porción de viga CD, ya que el área bajo la curva de carga representa el total de la carga aplicada entre C y D.

Debe también observarse que la ecuación (5.5) no es válida en un punto donde se aplique una carga concentrada; la curva de cortante es discontinua en tal punto, como se vio en la sección 5.2. De manera similar, las ecuaciones (5.6) y (5.6′) dejan de ser válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, debido a que no consideran el cambio súbito en el cortante causado por la carga concentrada. Por lo tanto, las ecuaciones (5.6) y (5.6′) deberán aplicarse sólo entre cargas concentradas sucesivas.

Generated by CamScanner from intsig.com

Relaciones entre el cortante y el momento flector. Regresando al diagrama de cuerpo libre de la figura 5.12*b*, y escribiendo ahora que la suma de momentos alrededor de C' es cero, se tiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_{C'} = 0: \qquad (M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\,\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \frac{1}{2} w\,(\Delta x)^2$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre Δx y haciendo que Δx se aproxime a cero, se obtiene

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{5.7}$$

La ecuación (5.7) indica que la pendiente dM/dx de la curva de momento flector es igual al valor del cortante. Esto es cierto en cualquier punto donde el cortante tenga un valor bien definido, esto es, en cualquier punto donde no se encuentre aplicada una carga concentrada. La ecuación (5.7) también muestra que $V = 0$ en puntos donde M es máximo. Esta propiedad facilita la determinación de los puntos donde es posible que la viga falle bajo flexión.

Integrando la ecuación (5.7) entre los puntos C y D, se escribe

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx \tag{5.8}$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de cortante entre } C \text{ y } D \tag{5.8'}$$

Note que el área bajo la curva de cortante deberá considerarse positiva donde el esfuerzo cortante es positivo y negativa donde el esfuerzo cortante es negativo. Las ecuaciones (5.8) y (5.8′) son válidas aun cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, en tanto la curva de cortante haya sido correctamente dibujada. Las ecuaciones dejan de ser válidas, sin embargo, si un par se aplica en un punto entre C y D, ya que no toman en consideración el cambio súbito en momento cortante causado por un par (véase problema modelo 5.6).

EJEMPLO 5.03

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 5.13 y obtenga el máximo valor del momento flector.

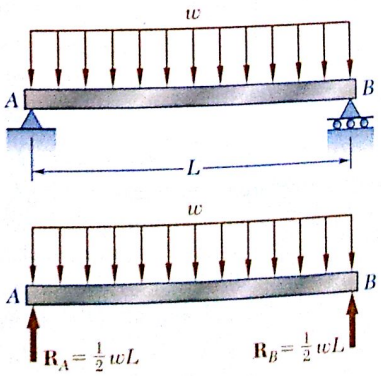


Figura 5.13

Del diagrama de cuerpo libre de la viga completa, se determina la magnitud de las reacciones en los apoyos.

$$R_A = R_B = \tfrac{1}{2} wL$$

A continuación, se dibuja el diagrama de cortante. Cerca del extremo A de la viga, el cortante es igual a R_A, es decir, a $\frac{1}{2}wL$, como puede verificarse considerando como diagrama de cuerpo libre una muy pequeña porción de la viga. Utilizando la ecuación

Generated by CamScanner from intsig.com

(5.6), se determina entonces el cortante V a cualquier distancia x desde A, escribiendo

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \tfrac{1}{2}wL - wx = w(\tfrac{1}{2}L - x)$$

La curva de corte es, por tanto, una recta oblicua que cruza el eje x en $x = L/2$ (figura 5.14*a*). Considerando, ahora, el momento flector, primero se observa que $M_A = 0$. El valor M del momento flector a cualquier distancia x desde A puede obtenerse de la ecuación (5.8); se tiene

$$M - M_A = \int_0^x V\,dx$$

$$M = \int_0^x w(\tfrac{1}{2}L - x)\,dx = \tfrac{1}{2}w(Lx - x^2)$$

La curva del momento flector es una parábola. El máximo valor del momento flector ocurre cuando $x = L/2$, ya que V (y por tanto dM/dx) es cero para tal valor de x. Sustituyendo $x = L/2$ en la última ecuación, se obtiene $M_{\text{máx}} = wL^2/8$ (véase figura 5.14*b*).

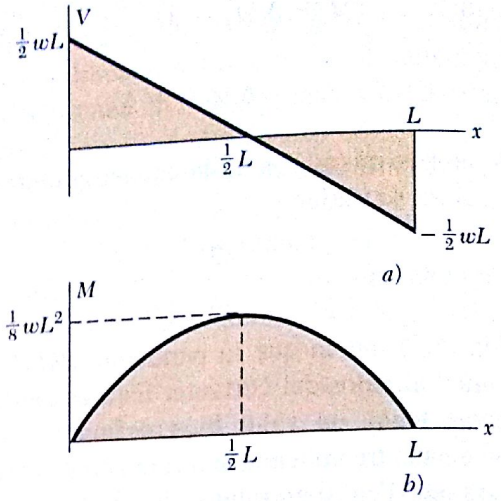


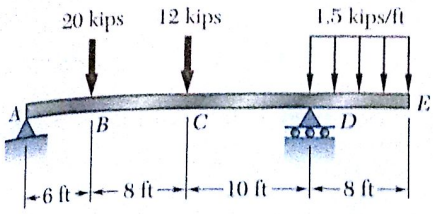
Figura 5.14

En la mayoría de las aplicaciones ingenieriles, se necesita saber el valor del momento flector sólo en unos cuantos puntos específicos. Una vez que se ha dibujado el diagrama de cortante, y después de que ha sido determinado M en uno de los extremos de la viga, el valor del momento flector puede obtenerse en cualquier punto dado calculando el área bajo la curva de cortante y utilizando la ecuación (5.8′). Por ejemplo, como $M_A = 0$ para la viga del ejemplo 5.03, el valor máximo del momento flector para esa viga se obtiene sencillamente midiendo el área del triángulo sombreado en el diagrama de cortante de la figura 5.14*a*. Se tiene

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

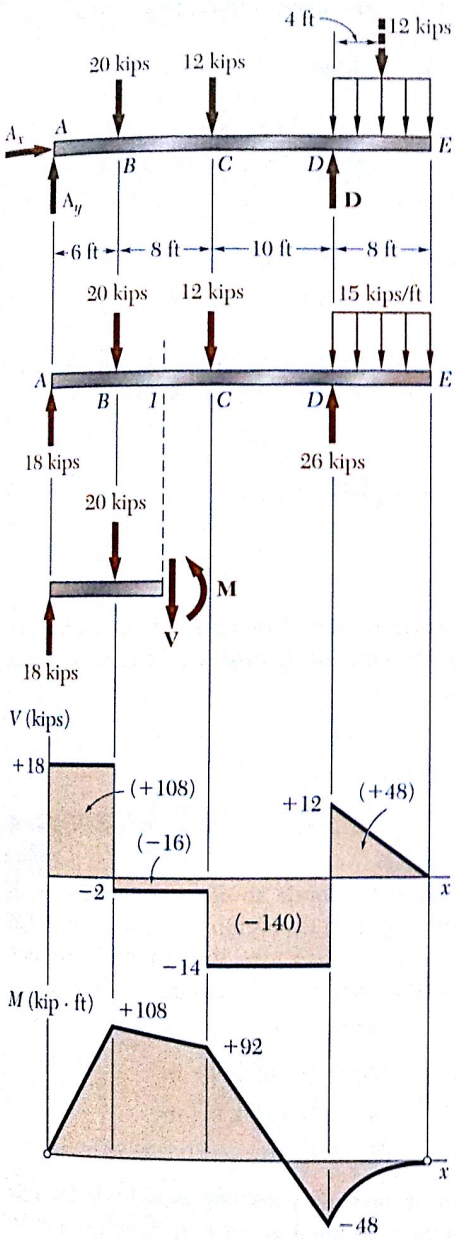
Se advierte que, en este ejemplo, la curva de carga es una recta horizontal, la curva de cortante es una recta oblicua y la curva del momento flector es una parábola. Si la curva de carga hubiese sido una recta oblicua (primer grado), la curva de cortante habría sido una parábola (segundo grado) y la curva del momento flector una cúbica (tercer grado). Las curvas de cortante y de momento flector siempre serán, respectivamente, uno y dos grados más altas que la curva de carga. Con esto en mente, es posible bosquejar los diagramas de cortante y de momento flector sin determinar, en realidad, las funciones $V(x)$ y $M(x)$, una vez que se han calculado algunos valores del cortante y del momento flector. Los bosquejos obtenidos serán más exactos si se utiliza el hecho de que, en cualquier punto donde las curvas son continuas, la pendiente de la curva de corte es igual a $-w$ y la pendiente de la curva de momento flector es igual a V.

Generated by CamScanner from intsig.com



PROBLEMA MODELO 5.3

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y carga representadas en la figura.



SOLUCIÓN

Reacciones. Considerando la viga entera como cuerpo libre, se escribe

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$:
$$D(24 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ ft}) = 0$$
$$D = +26 \text{ kips} \qquad \mathbf{D = 26 \text{ kips} \uparrow}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} = 0$
$$A_y = +18 \text{ kips} \qquad \mathbf{A_y = 18 \text{ kips} \uparrow}$$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0$: $A_x = 0$ $\qquad \mathbf{A_x = 0}$

También se advierte que tanto en A como en E el momento flector es cero; de esta manera, dos puntos (indicados por puntos gruesos) se obtienen en el diagrama de momento flector.

Diagrama de cortante. Ya que $dV/dx = -w$, se encuentra que entre las cargas concentradas y las reacciones la pendiente del diagrama de cortante es cero (es decir, el esfuerzo cortante es constante). El cortante en cualquier punto se determina dividiendo la viga en dos partes y considerando cualquiera de las partes como cuerpo libre. Por ejemplo, utilizando la porción de la viga a la izquierda del esfuerzo cortante 1, se obtiene el corte entre B y C:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $+18 \text{ kips} - 20 \text{ kips} - V = 0$ $\qquad V = -2 \text{ kips}$

También se encuentra que el esfuerzo cortante es de +12 kips justo a la derecha de D y cero en el extremo E. Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre D y E, el diagrama de cortante entre estos dos puntos es una línea recta.

Diagrama de momento flector. Recuerde que el área bajo la curva de cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre los mismos dos puntos. Por conveniencia, el área de cada porción del diagrama de cortante se calcula e indica entre paréntesis en el diagrama. Debido a que el momento flector M_A en el extremo izquierdo es cero, se escribe

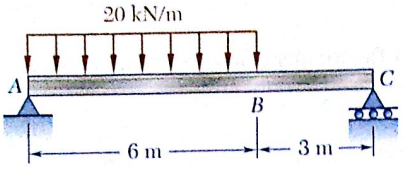
$$M_B - M_A = +108 \qquad M_B = +108 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$
$$M_C - M_B = -16 \qquad M_C = +92 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$
$$M_D - M_C = -140 \qquad M_D = -48 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$
$$M_E - M_D = +48 \qquad M_E = 0$$

Ya que M_E es cero, se obtiene una verificación de los cálculos.

Entre las cargas concentradas y las reacciones el cortante es constante; por tanto, la pendiente dM/dx es constante y el diagrama de momento flector se dibuja conectando los puntos conocidos con líneas rectas. Entre D y E, donde el diagrama de cortante es una recta oblicua, el diagrama de momento flector es una parábola.

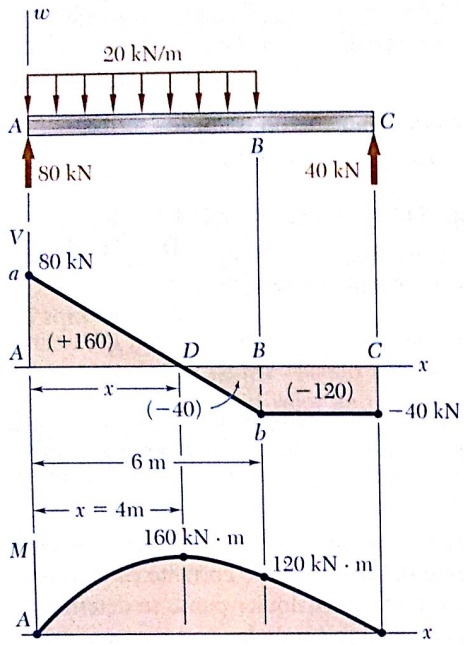
De los diagramas de V y de M se advierte que $V_{\text{máx}} = 18$ kips y $M_{\text{máx}} = 108$ kips · ft.

Generated by CamScanner from intsig.com



PROBLEMA MODELO 5.4

La viga W360 × 79 de acero laminado AC está simplemente apoyada y porta la carga uniformemente distribuida que se muestra en la figura. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y determine la localización y magnitud del esfuerzo normal máximo debido a la flexión.



SOLUCIÓN

Reacciones. Considerando la viga entera como cuerpo libre, se encuentra que

$$\mathbf{R}_A = 80\ \text{kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_C = 40\ \text{kN} \uparrow$$

Diagrama de cortante. El cortante justo a la derecha de A es $V_A = +80$ kN. Como el cambio en el cortante entre dos puntos es igual al valor *negativo* del área bajo la curva de carga entre los dos mismos puntos, se obtiene V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -(20\ \text{kN/m})(6\ \text{m}) = -120\ \text{kN}$$
$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40\ \text{kN}$$

Siendo la pendiente $dV/dx = -w$ constante entre A y B, el diagrama de cortante entre estos dos puntos se representa por una recta. Entre B y C, el área bajo la curva de carga es cero; por tanto,

$$V_C - V_B = 0 \qquad V_C = V_B = -40\ \text{kN}$$

y el corte es constante entre B y C.

Diagrama de momento flector. Se advierte que el momento flector en cada extremo de la viga es cero. Para determinar el momento flector máximo, se localiza el corte D de la viga donde $V = 0$. Se tiene

$$V_D - V_A = -wx$$
$$0 - 80\ \text{kN} = -(20\ \text{kN/m})x$$

y, despejando x:

$$x = 4\ \text{m} \blacktriangleleft$$

El momento flector máximo ocurre en el punto D, donde se tiene que $dM/dx = V = 0$. Las áreas de las diversas porciones del diagrama de cortante se calculan y dan (entre paréntesis) en el diagrama. Como el área del diagrama de cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre los mismos dos puntos, se escribe

$$M_D - M_A = +160\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_D = +160\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_B - M_D = -\ 40\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_B = +120\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_C - M_B = -120\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_C = 0$$

El diagrama de momento flector consiste en un arco de parábola seguido de un segmento de recta. La pendiente de la parábola en A es igual al valor de V en ese punto.

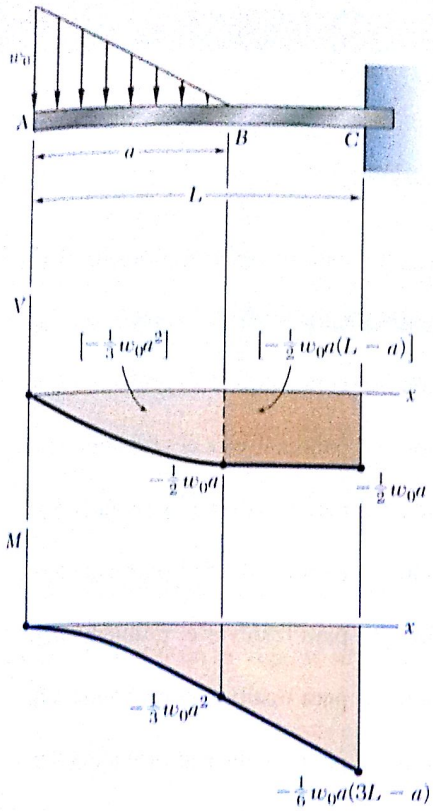
Esfuerzo normal máximo. Ocurre en D, donde $|M|$ es máximo. Del apéndice C se encuentra que para un perfil de acero laminado W360 × 79, $S = 1\,280\ \text{mm}^3$ alrededor de un eje horizontal. Sustituyendo este valor y $|M| = |M_D| = 160 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}$ en la ecuación (5.3), se escribe

$$\sigma_m = \frac{|M_D|}{S} = \frac{160 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}}{1\,280 \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 125.0 \times 10^6\ \text{Pa}$$

$$\text{Esfuerzo normal máximo en la viga} = 125.0\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

Generated by CamScanner from intsig.com

PROBLEMA MODELO 5.5



Bosqueje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga en voladizo que se muestra en la figura.

SOLUCIÓN

Diagrama de cortante. En el extremo libre de la viga, se encuentra que $V_A = 0$. Entre A y B, el área bajo la curva de carga es $\frac{1}{2}w_0a$; se encuentra V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -\tfrac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\tfrac{1}{2}w_0a$$

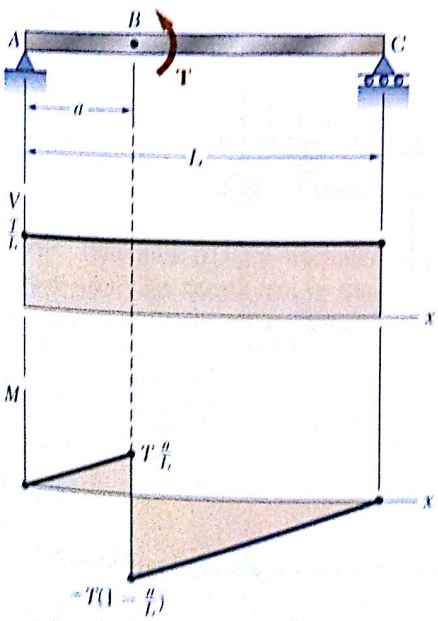
Entre B y C, la viga no se encuentra cargada, por tanto, $V_C = V_B$. En A, se tiene que $w = w_0$ y, de acuerdo con la ecuación (5.5), la pendiente de la curva de cortante es $dV/dx = -w_0$, mientras que en B la pendiente es $dV/dx = 0$. Entre A y B, la carga decrece linealmente, y el diagrama de cortante es parabólico. Entre B y C, $w = 0$, y el diagrama de cortante es una línea horizontal.

Diagrama de momento flector. El momento flector M_A en el extremo libre de la viga es cero. Se calcula el área bajo la curva de cortante y se escribe

$$M_B - M_A = -\tfrac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\tfrac{1}{3}w_0a^2$$
$$M_C - M_B = -\tfrac{1}{2}w_0a(L-a)$$
$$M_C = -\tfrac{1}{6}w_0a(3L-a)$$

El bosquejo del diagrama de momento flector se completa recordando que $dM/dx = V$. Se encuentra que entre A y B el diagrama se representa con una curva cúbica con pendiente cero en A, y entre B y C con una línea recta.

PROBLEMA MODELO 5.6



La viga sencilla AC está cargada por un par con momento T aplicado en el punto B. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector de la viga.

SOLUCIÓN

Considerando la viga entera como un cuerpo libre, se obtiene

$$\mathbf{R}_A = \frac{T}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = \frac{T}{L}\downarrow$$

El cortante en cualquier sección es constante e igual a T/L. Como un par se aplica en B, el diagrama de momento flector es discontinuo en B; se representa por dos rectas oblicuas y disminuye repentinamente en B por una cantidad igual a T.

Generated by CamScanner from intsig.com

PROBLEMAS

5.34 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.1*a*).

5.35 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.2*a*).

5.36 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.3*a*).

5.37 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.4*a*).

5.38 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.5*a*).

5.39 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.6*a*).

5.40 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.7.

5.41 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.8.

5.42 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.9.

5.43 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.10.

5.44* y *5.45 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.

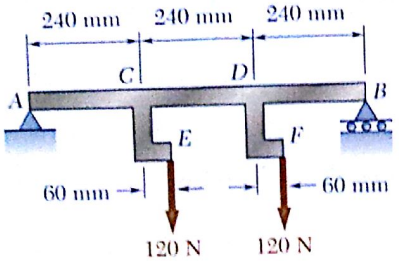


Figura *P5.44*

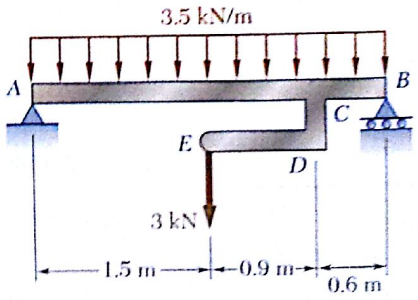


Figura *P5.45*

5.46 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.15.

5.47 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.16.

5.48 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.17.

5.49 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.18.

Generated by CamScanner from intsig.com

5.50 y *5.51* Determine *a*) las ecuaciones de las curvas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, *b*) el máximo valor absoluto del momento flector en la viga.

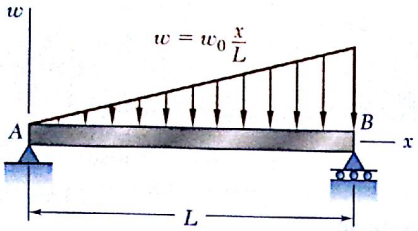


Figura P5.50

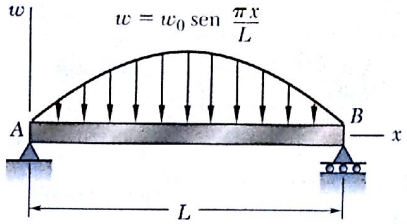


Figura *P5.51*

5.52 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine las ecuaciones de las curvas de cortante y de momento flector y el máximo valor absoluto del momento flector en la viga, si se sabe que *a*) $k = 1$, *b*) $k = 0.5$.

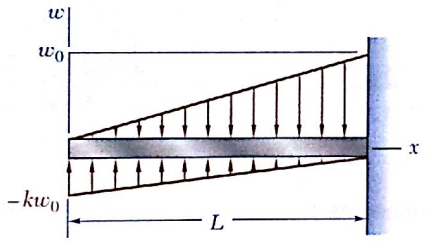


Figura P5.52

5.53 Determine *a*) las ecuaciones de las curvas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, *b*) el máximo valor absoluto del momento flector en la viga.

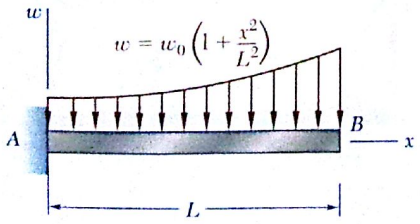


Figura *P5.53*

Generated by CamScanner from intsig.com

5.54 y 5.55 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

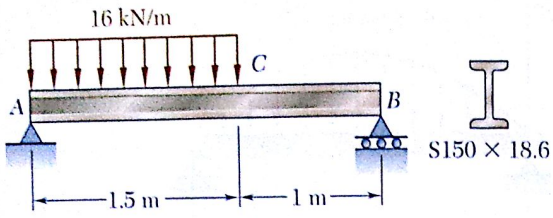


Figura P5.54

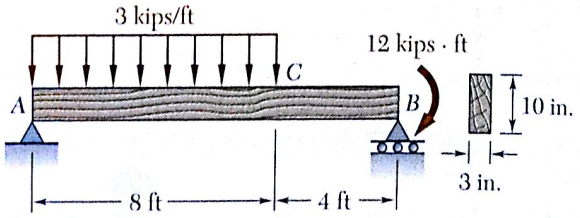


Figura P5.55

5.56 y *5.57* Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

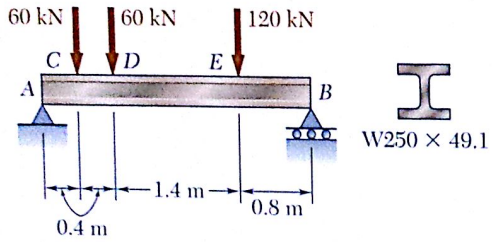


Figura P5.56

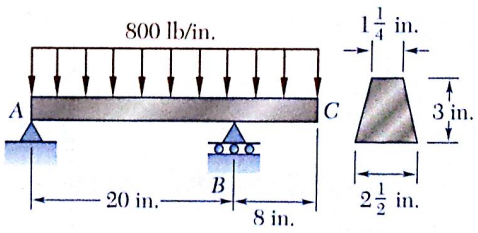


Figura *P5.57*

5.58 y 5.59 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura y calcule el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

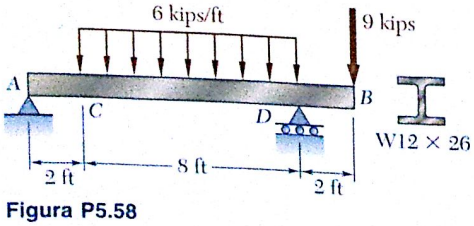


Figura P5.58

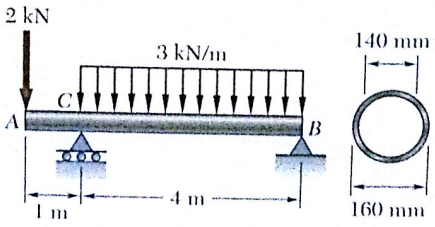


Figura P5.59

Generated by CamScanner from intsig.com

5.60 y *5.61 Si se sabe que la barra *AB* está en equilibrio bajo la carga que se muestra en la figura, dibuje los diagramas de cortante y de momento flector y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

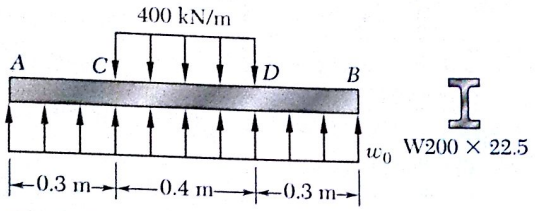


Figura P5.60

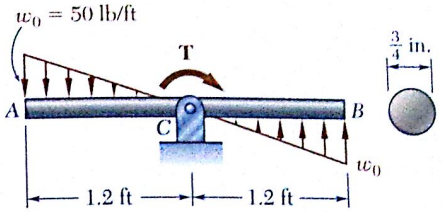


Figura *P5.61*

***5.62** La viga *AB* soporta una carga uniformemente distribuida de 2 kN/m y dos cargas concentradas **P** y **Q**. Se ha determinado experimentalmente que los esfuerzos normales debidos a la flexión en el borde inferior del patín inferior de la viga son de −56.9 MPa en *A* y de −29.9 MPa en *C*. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y determine las magnitudes de las cargas **P** y **Q**.

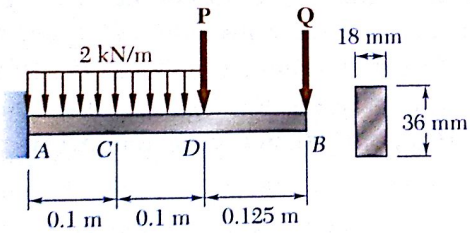


Figura P5.62

***5.63** La viga *AB* soporta dos cargas concentradas **P** y **Q**. El esfuerzo normal debido a la flexión en el borde inferior de la viga es de +55 MPa en *D* y de +37.5 MPa en *F*. *a*) Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión que ocurre en la viga.

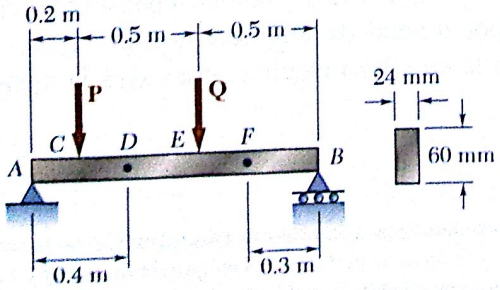


Figura *P5.63*

Generated by CamScanner from intsig.com

*5.64 La viga AB soporta una carga uniformemente distribuida de 480 lb/ft y dos cargas concentradas **P** y **Q**. El esfuerzo normal debido a la flexión en el borde inferior del patín inferior es de +14.85 ksi en D y de +10.65 ksi en E. *a*) Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión que ocurre en la viga.

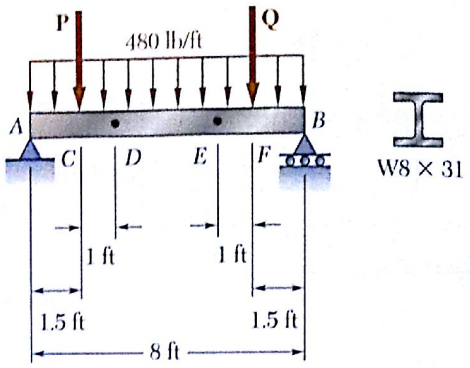


Figura P5.64

5.4 DISEÑO DE VIGAS PRISMÁTICAS A LA FLEXIÓN

Como se indicó en la sección 5.1, el diseño de una viga se controla, por lo general, mediante el máximo valor absoluto $|M|_{\text{máx}}$ del momento flector que ocurrirá en la viga. El esfuerzo normal máximo σ_m en la viga se encuentra en la superficie de ésta en la sección crítica donde ocurre $|M|_{\text{máx}}$, y se obtiene sustituyendo $|M|_{\text{máx}}$ por $|M|$ en la ecuación (5.1) o en la ecuación (5.3).† Se escribe

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\text{máx}}\, c}{I} \qquad \sigma_m = \frac{|M|_{\text{máx}}}{S} \qquad (5.1', 5.3')$$

Un diseño seguro requiere que $\sigma_m \leq \sigma_{\text{perm}}$, donde σ_{perm} es el esfuerzo permisible para el material utilizado. Sustituir σ_{perm} por σ_m en la ecuación (5.3′) y despejar S resulta en el mínimo valor permisible del módulo de sección para la viga que se diseña:

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} \qquad (5.9)$$

El diseño de los tipos comunes de vigas, como las de madera de sección transversal rectangular y las de acero laminado con diversos perfiles de sección transversal, se considerará en esta sección. Un procedimiento adecuado debe conducir al diseño más económico. Esto significa que, entre vigas del mismo tipo y del mismo material, siendo iguales otros factores, la viga con el mínimo peso por unidad de longitud —y, por tanto, la mínima sección transversal— será la que deba elegirse, pues será la menos costosa.

†Para vigas que no son simétricas con respecto a su superficie neutra, la mayor de las distancias desde la superficie neutra hasta las superficies de la viga deberá utilizarse para c en la ecuación (5.1) y en el cálculo del módulo de sección $S = I/c$.

Generated by CamScanner from intsig.com

El procedimiento de diseño incluirá los siguientes pasos:†

1. Primero determine el valor de σ_{perm} para el material seleccionado a partir de una tabla de propiedades de materiales o de especificaciones de diseño. También puede calcularse este valor dividiendo la resistencia última σ_U del material entre un factor de seguridad apropiado (véase sección 1.13). Suponiendo, por el momento, que el valor de σ_{perm} es el mismo a tensión y a compresión, proceda como se indica a continuación.
2. Dibújese los diagramas de cortante y de momento flector correspondientes a las condiciones especificadas de carga, y determine el máximo valor absoluto $|M|_{máx}$ del momento flector en la viga.
3. Obtenga, de la ecuación (5.9), el valor mínimo permisible $S_{mín}$ del módulo de sección de la viga.
4. Para una viga de madera, el espesor h de la viga, su ancho b o la razón h/b que caracteriza la forma de su sección transversal probablemente habrán sido especificados. Las dimensiones desconocidas pueden seleccionarse recordando, de la ecuación (4.19) de la sección 4.4, que b y h deben satisfacer la relación $\frac{1}{6}bh^2 = S \geq S_{mín}$.
5. Para una viga de acero laminado, consulte la tabla apropiada en el apéndice C. De las secciones disponibles de la viga sólo deben considerarse aquellas que tienen un módulo de sección $S \geq S_{mín}$ y debe seleccionarse de este grupo la sección que presente el peso más pequeño por unidad de longitud. Ésta será la sección más económica para la que $S \geq S_{mín}$. Note que no es, necesariamente, la sección que tenga el valor más pequeño de S (véase ejemplo 5.04). En algunos casos, la elección de una sección se verá limitada por otras consideraciones, como, por ejemplo, el espesor permisible de la sección transversal o la deflexión permisible de la viga (véase capítulo 9).

El análisis anterior se restringió a materiales para los que σ_{perm} es el mismo a tensión y a compresión. Si σ_{perm} es diferente a tensión y a compresión, debe tenerse la seguridad de que la sección de la viga se ha seleccionado de tal manera que $\sigma_m \leq \sigma_{perm}$ tanto para los esfuerzos a tensión como a compresión. Si la sección transversal no es simétrica con respecto a su eje neutro, los esfuerzos máximos a tensión y a compresión no se producirán, necesariamente, en la sección donde $|M|$ sea máximo. Uno puede ocurrir donde M es máximo y el otro donde M es mínimo. Por tanto, el paso 2 deberá incluir la determinación tanto de $M_{máx}$ como de $M_{mín}$, y el paso 3 deberá modificarse para tener en cuenta tanto los esfuerzos de tensión como de compresión.

Finalmente, tenga en mente que el procedimiento de diseño descrito en esta sección sólo toma en cuenta los esfuerzos normales que ocurren en la superficie de la viga. Las vigas cortas, en especial las hechas de madera, pueden fallar a cortante bajo carga transversal. La determinación de los esfuerzos cortantes en vigas se estudiará en el capítulo 6. También, en el caso de las vigas de acero laminado, pueden ocurrir esfuerzos normales mayores que los considerados aquí en las uniones del alma con los patines. Esto se analizará en el capítulo 8.

†Se ha supuesto que todas las vigas consideradas en este capítulo están adecuadamente soportadas para evitar el pandeo lateral, y que se suministran placas de apoyo bajo cargas concentradas aplicadas a vigas de acero laminado para evitar el pandeo localizado (lisiado) del alma.

Generated by CamScanner from intsig.com

EJEMPLO 5.04

Seleccione una viga de patín ancho para soportar la carga de 15 kips como se indica en la figura 5.15. El esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi.

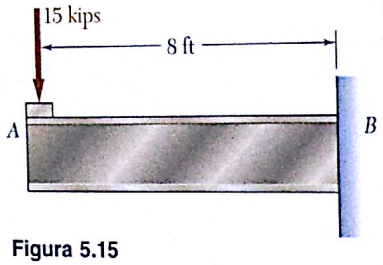


Figura 5.15

1. El esfuerzo normal permisible es dado: $\sigma_{perm} = 24$ ksi.

2. El esfuerzo cortante es constante e igual a 15 kips. El momento flector es máximo en B. Se tiene que

$$|M|_{máx} = (15 \text{ kips})(8 \text{ ft}) = 120 \text{ kips} \cdot \text{ft} = 1\,440 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$

3. El mínimo módulo de sección permisible es

$$S_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{1\,440 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{24 \text{ ksi}} = 60.0 \text{ in.}^3$$

4. Con referencia a la tabla *Propiedades de perfiles de acero laminado* en el apéndice C, se observa que los perfiles se ordenaron en grupos con el mismo espesor y que en cada grupo se presentan en orden de peso decreciente. Se elige en cada grupo la viga más ligera que tenga un módulo de sección $S = I/c$ por lo menos tan grande como $S_{mín}$ y se registran los resultados en la siguiente tabla.

Perfil	S, in.^{3}
W21 × 44	81.6
W18 × 50	88.9
W16 × 40	64.7
W14 × 43	62.7
W12 × 50	64.7
W10 × 54	60.0

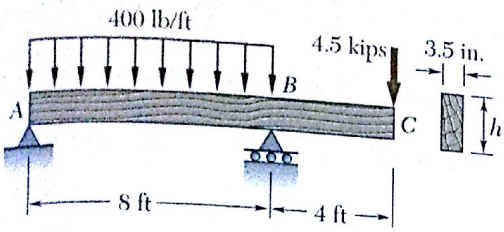
El más económico es el perfil W16 × 40, ya que sólo pesa 40 lb/ft, aun cuando presente un módulo de sección mayor que dos de los otros perfiles. También se advierte que el peso total de la viga será de (8 ft) × (40 lb) = 320 lb. Este peso es pequeño comparado con la carga de 15 000 lb y puede despreciarse en el análisis.

***Diseño por carga y factor de resistencia.** Este método alterno para el diseño se describió brevemente en la sección 1.13 y se aplicó a elementos bajo carga axial. Es posible aplicarlo con facilidad al diseño de vigas en flexión. Reemplazando en la ecuación (1.26) las cargas P_D, P_L y P_U, respectivamente, por los momentos flectores M_D, M_L y M_U, se escribe

$$\gamma_D M_D + \gamma_L M_L \leq \phi M_U \tag{5.10}$$

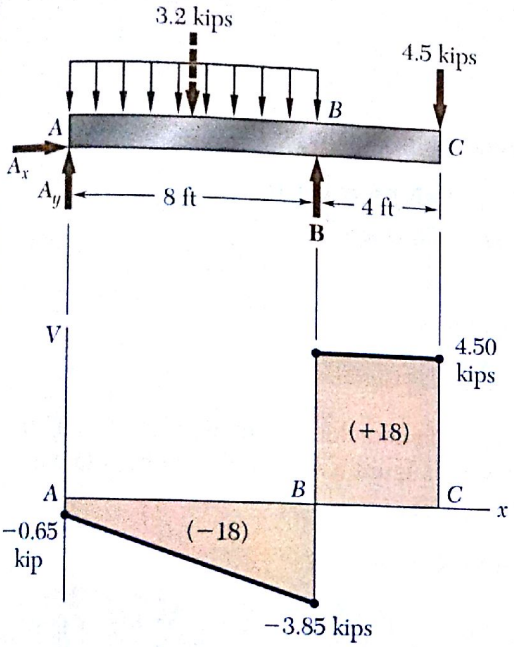
Los coeficientes γ_D y γ_L se conocen como los *factores de carga* y el coeficiente ϕ como el *factor de resistencia*. Los momentos M_D y M_L son los momentos flectores debidos, respectivamente, a las cargas muertas y vivas, mientras que M_U es igual al producto de la resistencia última del material σ_U y el módulo de sección S de la viga: $M_U = S\sigma_U$.

Generated by CamScanner from intsig.com



PROBLEMA MODELO 5.7

Una viga de madera con un tramo en voladizo de 12 ft de longitud con un claro de 8 ft AB se diseñará para soportar las cargas distribuidas y concentradas que se muestran en la figura. Sabiendo que se utilizará madera de ancho nominal de 4 in. (ancho real de 3.5 in.) con un esfuerzo permisible de 1.75 ksi, determine el espesor mínimo requerido h de la viga.



SOLUCIÓN

Reacciones. Considerando la viga en su totalidad como cuerpo libre, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad B(8 \text{ ft}) - (3.2 \text{ kips})(4 \text{ ft}) - (4.5 \text{ kips})(12 \text{ ft}) = 0$$
$$B = 8.35 \text{ kips} \qquad \mathbf{B} = 8.35 \text{ kips} \uparrow$$
$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + 8.35 \text{ kips} - 3.2 \text{ kips} - 4.5 \text{ kips} = 0$$
$$A_y = -0.65 \text{ kip} \qquad \mathbf{A} = 0.65 \text{ kip} \downarrow$$

Diagrama de cortante. El cortante justo a la derecha de A es $V_A = A_y = -0.65$ kip. Ya que el cambio en cortante entre A y B es igual a *menos* el área bajo la curva de carga entre estos dos puntos, se obtiene V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -(400 \text{ lb/ft})(8 \text{ ft}) = -3\,200 \text{ lb} = -3.20 \text{ kips}$$
$$V_B = V_A - 3.20 \text{ kips} = -0.65 \text{ kip} - 3.20 \text{ kips} = -3.85 \text{ kips}.$$

La reacción en B produce un súbito incremento de 8.35 kips en V, lo que resulta en un valor del cortante igual a 4.5 kips a la derecha de B. Como no se aplica carga entre B y C, el cortante permanece constante entre estos dos puntos.

Determinación de $|M|_{\text{máx}}$. Primero se observa que el momento flector es igual a cero en ambos extremos de la viga: $M_A = M_C = 0$. Entre A y B el momento flector disminuye una cantidad igual al área bajo la curva de cortante, y entre B y C aumenta una cantidad correspondiente. Por tanto, el valor absoluto máximo del momento flector es $|M|_{\text{máx}} = 18.00 \text{ kips} \cdot \text{ft}$.

Módulo de sección mínimo permisible. Sustituyendo el valor dado de σ_{perm} y el valor de $|M|_{\text{máx}}$ en la ecuación (5.9), se tiene

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{(18 \text{ kips} \cdot \text{ft})(12 \text{ in./ft})}{1.75 \text{ ksi}} = 123.43 \text{ in.}^3$$

Espesor mínimo requerido de la viga. Recordando la fórmula desarrollada en la parte 4 del procedimiento de diseño descrito en la sección 5.4 y sustituyendo los valores de b y de $S_{\text{mín}}$, se tiene

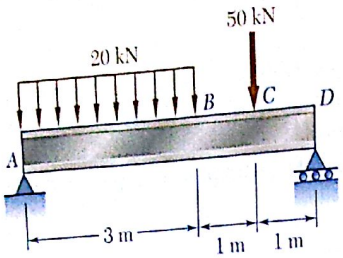
$$\tfrac{1}{6} bh^2 \geq S_{\text{mín}} \qquad \tfrac{1}{6}(3.5 \text{ in.})h^2 \geq 123.43 \text{ in.}^3 \qquad h \geq 14.546 \text{ in.}$$

El espesor mínimo requerido en la viga es

$$h = 14.55 \text{ in.} \blacktriangleleft$$

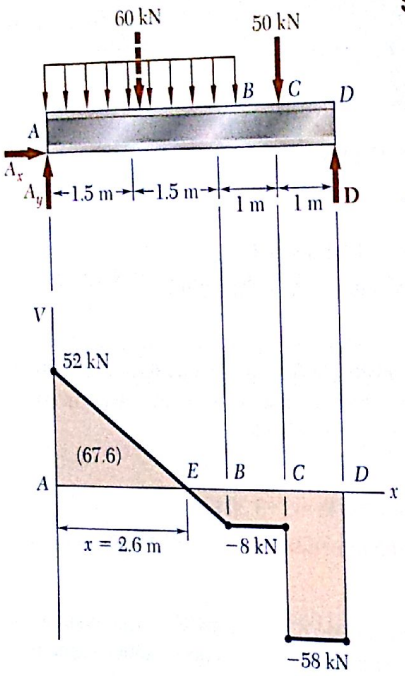
Generated by CamScanner from intsig.com

PROBLEMA MODELO 5.8



Una viga de acero simplemente apoyada de 5 m de largo, AD, debe soportar las cargas distribuida y concentrada que se muestran en la figura. Si el esfuerzo normal permisible para el grado de acero utilizado es de 160 MPa, seleccione el perfil de patín ancho que deberá utilizarse.

SOLUCIÓN



Reacciones. Considerando toda la viga como un cuerpo libre, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad D(5\text{ m}) - (60\text{ kN})(1.5\text{ m}) - (50\text{ kN})(4\text{ m}) = 0$$

$$D = 58.0\text{ kN} \qquad \mathbf{D} = 58.0\text{ kN} \uparrow$$

$$\pm \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + 58.0\text{ kN} - 60\text{ kN} - 50\text{ kN} = 0$$

$$A_y = 52.0\text{ kN} \qquad \mathbf{A} = 52.0\text{ kN} \uparrow$$

Diagrama de cortante. El cortante justo a la derecha de A es $V_A = A_y = +52.0$ kN. Como el cambio en el cortante entre A y B es igual a *menos* el área bajo la curva de carga entre estos dos puntos, se tiene

$$V_B = 52.0\text{ kN} - 60\text{ kN} = -8\text{ kN}$$

El esfuerzo cortante permanece constante entre B y C, donde cae a -58 kN, y conserva este valor entre C y D. Se localiza la sección E de la viga donde $V = 0$ escribiendo

$$V_E - V_A = -wx$$

$$0 - 52.0\text{ kN} = -(20\text{ kN/m})x$$

Despejando x se encuentra que $x = 2.60$ m.

Determinación de $|M|_{\text{máx}}$. El momento flector es máximo en E, donde $V = 0$. Ya que M es cero en el apoyo A, su máximo valor en E es igual al área bajo la curva de corte entre A y E. Se tiene, por tanto, que $|M|_{\text{máx}} = M_E = 67.6\text{ kN} \cdot \text{m}$.

Módulo de sección mínimo permisible. Sustituyendo en la ecuación (5.9) el valor dado de σ_{perm} y el valor de $|M|_{\text{máx}}$ que se encontró, se escribe

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{67.6\text{ kN} \cdot \text{m}}{160\text{ MPa}} = 422.5 \times 10^{-6}\text{ m}^3 = 422.5 \times 10^{3}\text{ mm}^3$$

Selección del perfil de patín ancho. Del apéndice C se elige una lista de perfiles que tienen un módulo de sección mayor que $S_{\text{mín}}$ y que también son el perfil más ligero en un grupo con un espesor dado.

Perfil	S, mm³
W410 × 38.8	637
W360 × 32.9	474
W310 × 38.7	549
W250 × 44.8	535
W200 × 46.1	448

Se selecciona el perfil más ligero disponible, esto es

W360 × 32.9 ◀

Generated by CamScanner from intsig.com

PROBLEMAS

5.65 y *5.66* Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, diseñe la sección transversal de la viga si se sabe que el grado de madera utilizado tiene un esfuerzo normal permisible de 12 MPa.

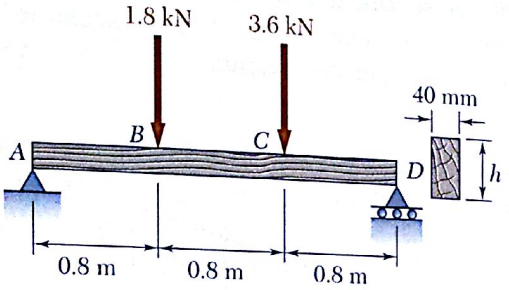


Figura P5.65

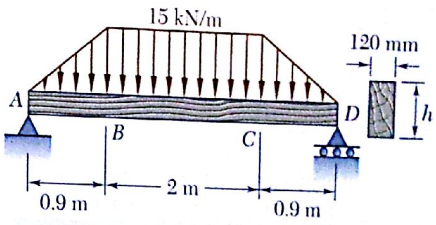


Figura *P5.66*

***5.67* y 5.68** Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, diseñe la sección transversal de la viga si se sabe que el grado de madera utilizado tiene un esfuerzo normal permisible de 1 750 psi.

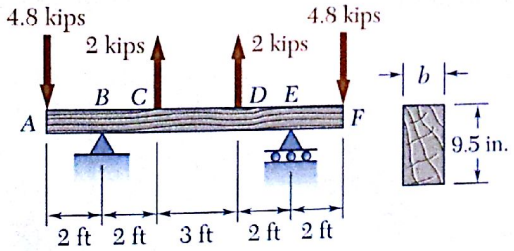


Figura *P5.67*

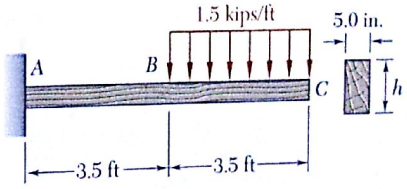


Figura P5.68

5.69 y 5.70 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, diseñe la sección transversal de la viga si se sabe que el grado de madera utilizado tiene un esfuerzo normal permisible de 12 MPa.

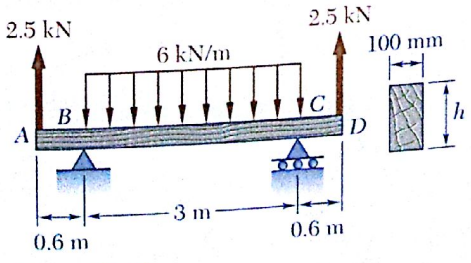


Figura P5.69

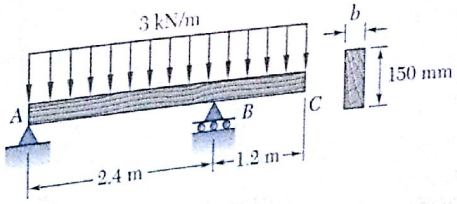


Figura P5.70

Generated by CamScanner from intsig.com

5.71 y 5.72 Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

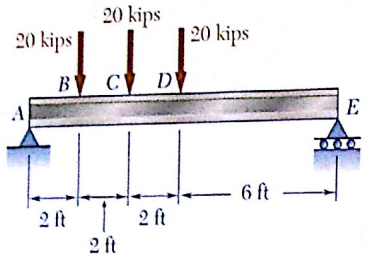


Figura P5.71

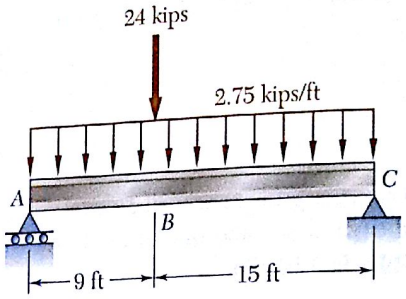


Figura P5.72

5.73 y 5.74 Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 160 MPa, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

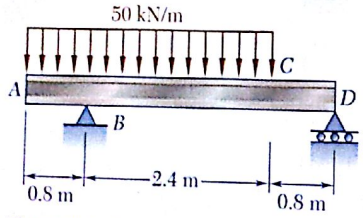


Figura P5.73

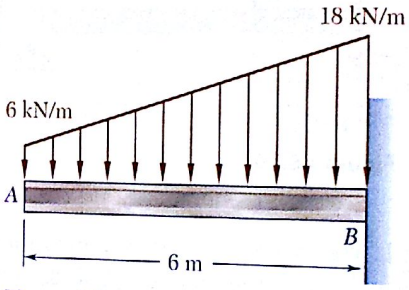


Figura P5.74

***5.75* y 5.76** Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, seleccione la viga con perfil S más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

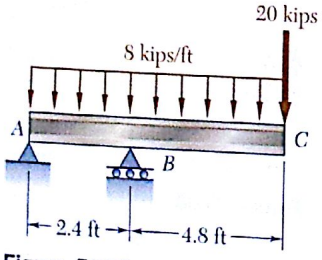


Figura *P5.75*

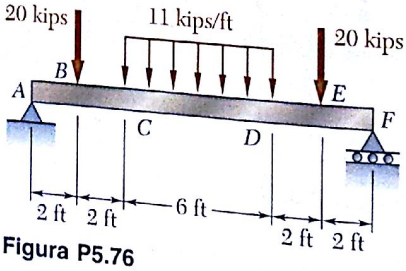


Figura P5.76

5.77 y *5.78* Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 160 MPa, seleccione la viga con perfil S más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

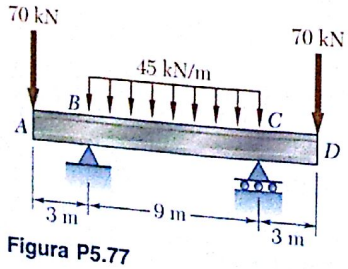


Figura P5.77

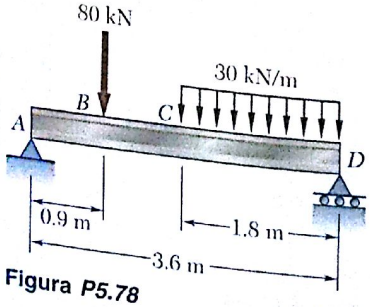


Figura *P5.78*

Generated by CamScanner from intsig.com

5.79 Un tubo de acero de 4 in. de diámetro debe soportar las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que el inventario de tubos disponibles tiene espesores que van de $\frac{1}{4}$ in. a 1 in. con incrementos de $\frac{1}{8}$ in., y que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, determine el mínimo espesor de pared t que puede utilizarse.

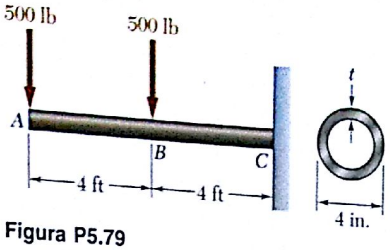


Figura P5.79

5.80 Tres placas de acero se sueldan entre sí para formar la viga que se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero usado es de 22 ksi, determine el mínimo ancho de patín b que puede usarse.

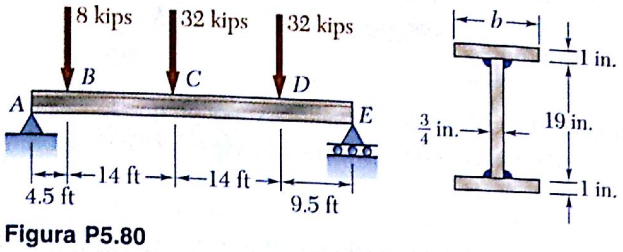


Figura P5.80

5.81 Dos canales métricos de acero laminado se sueldan a lo largo de sus bordes y se emplean para soportar las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 150 MPa, determine los canales más económicos que pueden utilizarse.

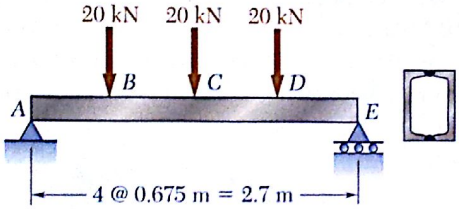


Figura P5.81

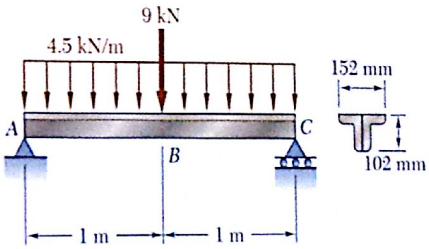


Figura P5.82

5.82 Dos ángulos L102 × 76 de acero laminado se sujetan con pernos para soportar las cargas que se ilustran en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 140 MPa, determine el mínimo espesor del ángulo que puede utilizarse.

5.83 Si se supone que la reacción hacia arriba del suelo se encuentra uniformemente distribuida y se sabe que el esfuerzo normal permisible del acero utilizado es de 170 MPa, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

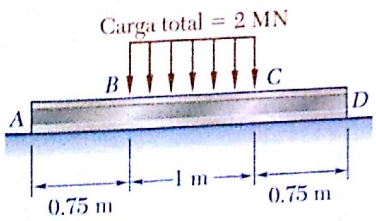


Figura P5.83

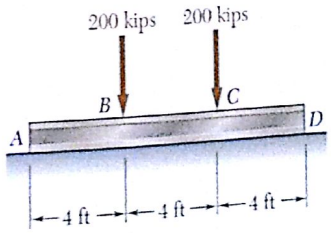


Figura P5.84

5.84 Si se supone que la reacción hacia arriba del suelo se encuentra uniformemente distribuida y se sabe que el esfuerzo normal permisible del acero utilizado es de 24 ksi, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

Generated by CamScanner from intsig.com

5.85 Determine la máxima carga distribuida permisible w para la viga mostrada, si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +80 MPa en tensión y de −130 MPa en compresión.

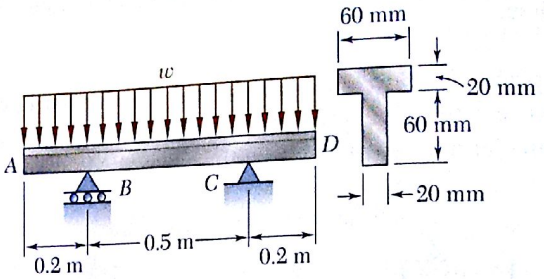


Figura P5.85

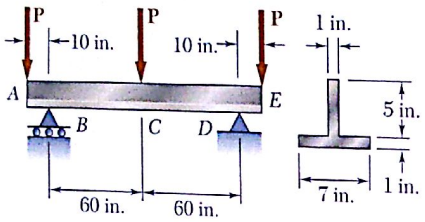


Figura *P5.87*

5.86 Retome el problema 5.85, y ahora suponga que la sección transversal de la viga se invierte, de manera que la aleta de la viga descansa sobre los soportes en B y C.

5.87 Determine el valor permisible de **P** para las cargas que se muestran en la figura, si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +8 ksi en tensión y de −18 ksi en compresión.

5.88 Retome el problema 5.87, y ahora suponga que la viga en forma de T se ha invertido.

5.89 Las vigas AB, BC y CD tienen la sección transversal que se indica en la figura y están conectadas con pernos en B y en C. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +110 MPa en tensión y de −150 MPa en compresión, determine *a*) el máximo valor permisible de w si la viga BC no debe estar sobreesforzada, *b*) la máxima distancia a correspondiente en la cual las vigas en voladizo AB y CD no están sobreesforzadas.

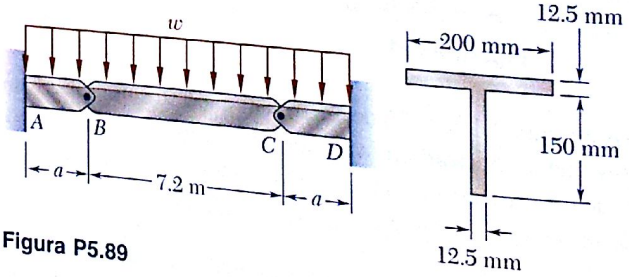


Figura P5.89

5.90 Las vigas AB, BC y CD tienen la sección transversal que se muestra en la figura y están conectadas con pernos en B y en C. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +110 MPa en tensión y de −150 MPa en compresión, determine *a*) el máximo valor permisible de **P** si la viga BC no debe estar sobreesforzada, *b*) la máxima distancia a correspondiente en la cual las vigas en voladizo AB y CD no están sobreesforzadas.

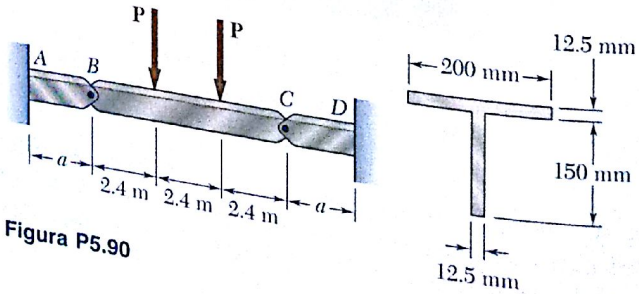


Figura P5.90

Generated by CamScanner from intsig.com

5.91 Una carga de 240 kN será soportada en el centro del claro de 5 m que se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 165 MPa, determine *a*) la mínima longitud permisible *l* de la viga *CD* si la viga *AB*, tipo W310 × 74, no debe estar sobreesforzada, *b*) el perfil W más económico que puede utilizarse para la viga *CD*. Desprecie el peso de ambas vigas.

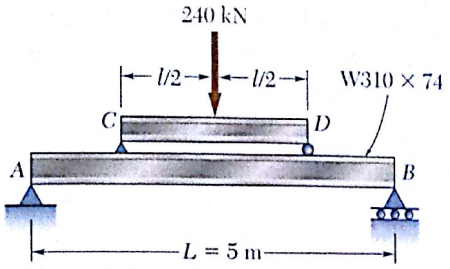


Figura *P5.91*

5.92 La viga *ABC* se atornilla a las vigas *DBE* y *FCG*. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de 24 ksi, seleccione el perfil de patín ancho más económico que puede utilizarse *a*) para la viga *ABC*, *b*) para la viga *DBE*, *c*) para la viga *FCG*.

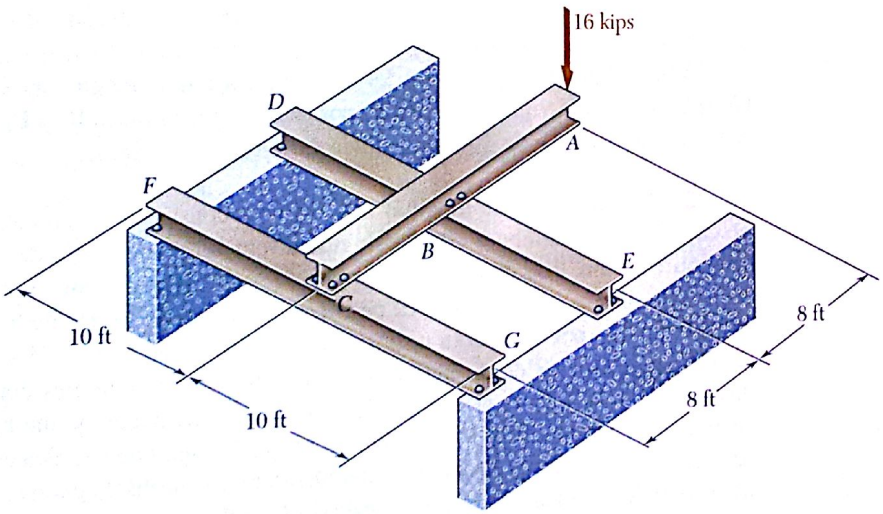


Figura P5.92

5.93 Una carga uniformemente distribuida de 66 kN/m debe ser soportada a través del claro de 6 m como se ilustra en la figura. Si el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 140 MPa, determine *a*) la longitud mínima permisible *l* de la viga *CD* si la viga *AB* tipo W460 × 74 no debe sobreesforzarse, *b*) el perfil W más económico que puede utilizarse para la viga *CD*. Desprecie el peso de ambas vigas.

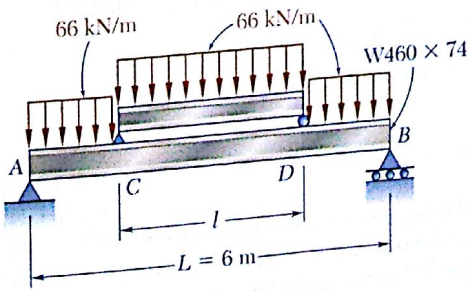


Figura *P5.93*

Generated by CamScanner from intsig.com

***5.94** La estructura de un techo que se compone de madera contrachapada y material para techar está soportada por varias vigas de madera de longitud $L = 16$ m. La carga muerta que soporta cada viga, incluso el peso estimado de la viga, puede representarse por una carga uniformemente distribuida $w_D = 350$ N/m. Las cargas vivas consisten en la carga de nieve, representada por una carga uniformemente distribuida $w_L = 600$ N/m, y una carga concentrada **P** de 6 kN aplicada en el punto medio C de cada viga. Si se sabe que la resistencia última para la madera utilizada es $\sigma_U = 50$ MPa y que el ancho de las vigas es $b = 75$ mm, determine el espesor mínimo permisible h de las vigas, utilizando DCFR con los factores de carga $\gamma_D = 1.2$, $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia $\phi = 0.9$.

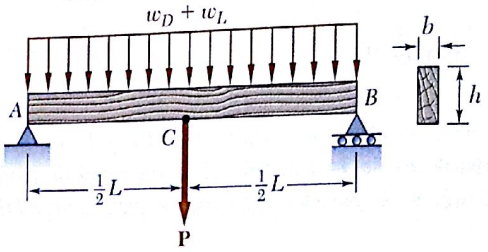


Figura P5.94

***5.95** Retome el problema 5.94, y suponga que la carga concentrada **P** de 6 kN aplicada a cada viga se reemplaza por cargas concentradas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ de 3 kN aplicadas a una distancia de 4 m desde cada extremo de las vigas.

***5.96** Un puente de longitud $L = 48$ ft se construirá en un camino secundario cuyo acceso a camiones está restringido a vehículos de dos ejes de peso mediano. Consistirá en una losa de concreto y vigas de acero simplemente apoyadas con una resistencia última $\sigma_U = 60$ ksi. El peso combinado de la losa y de las vigas puede ser aproximado por una carga uniformemente distribuida $w = 0.75$ kips/ft en cada viga. Para propósitos de diseño, suponga que un camión con ejes colocados a una distancia $a = 14$ ft entre sí será conducido a través del puente y que las cargas concentradas resultantes $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ ejercidas sobre cada viga pueden alcanzar valores de hasta 24 kips y 6 kips, respectivamente. Determine el perfil de patín ancho más económico para las vigas, utilizando el método DCFR con factores de carga $\gamma_D = 1.25$, $\gamma_L = 1.75$ y el factor de resistencia $\phi = 0.9$. [*Sugerencia:* Puede mostrarse que el máximo valor de $|M_L|$ ocurre bajo la carga mayor cuando dicha carga se coloca a la izquierda del centro de la viga a una distancia igual a $aP_2/2(P_1 + P_2)$.]

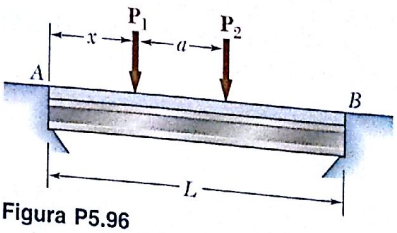


Figura P5.96

***5.97** Si se supone que las cargas de los ejes delantero y trasero permanecen con la misma razón que para el problema 5.96, determine cuán pesado podría ser un camión para pasar por el puente diseñado en ese problema.

Generated by CamScanner from intsig.com

*5.5 USO DE FUNCIONES DE SINGULARIDAD PARA DETERMINAR EL CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR EN UNA VIGA

Repasando lo estudiado en las secciones anteriores, se observa que el cortante y el momento flector rara vez pudieron ser descritos por funciones analíticas únicas. En el caso de la viga en voladizo del ejemplo 5.02 (figura 5.10), que soportaba una carga uniformemente distribuida w, el cortante y el momento flector *sí pudieron* representarse con funciones analíticas únicas, específicamente, $V = -wx$ y $M = -\frac{1}{2}wx^2$; esto se debió a que *no* existió *discontinuidad* en la carga de la viga. Por otra parte, en el caso de la viga simplemente apoyada del ejemplo 5.01, que estaba cargada sólo en su punto central C, la carga **P** aplicada en C representó una *singularidad* en la carga de la viga. Esta singularidad resultó en discontinuidades en los diagramas de cortante y de momento y requirió del uso de diferentes funciones analíticas para representar a V y a M en las porciones de la viga situadas, respectivamente, a la izquierda y a la derecha del punto C. En el problema modelo 5.2, la viga hubo de ser dividida en tres porciones, en cada una de las cuales se utilizaron diferentes funciones para representar el cortante y el momento flector. Esta situación requirió de la representación gráfica de las funciones V y M suministradas por los diagramas de cortante y de momento flector y, al final de la sección 5.3, sobre un método gráfico de integración para determinar V y M a partir de la carga distribuida w.

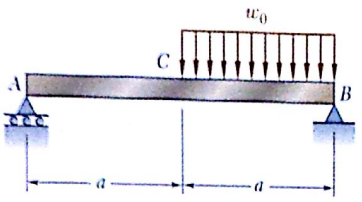


Figura 5.16

El propósito de esta sección es mostrar cómo el uso de *funciones de singularidad* hace posible representar el cortante V y el momento flector M por expresiones matemáticas únicas.

Considere la viga simplemente apoyada AB, de longitud $2a$, que lleva una carga uniformemente distribuida w_0 que se extiende desde su punto medio C hasta su soporte derecho B (figura 5.16). Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga completa (figura 5.17*a*); reemplazando la carga distribuida por una carga concentrada equivalente y, sumando momentos alrededor de B, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (w_0a)(\tfrac{1}{2}a) - R_A(2a) = 0 \qquad R_A = \tfrac{1}{4}w_0a$$

A continuación se corta la viga en un punto D entre A y C. Del diagrama de cuerpo libre de AD (figura 5.17*b*) se concluye que, en el intervalo $0 < x < a$, el cortante y el momento flector son expresados, respectivamente, por las funciones

$$V_1(x) = \tfrac{1}{4}w_0a \qquad \text{y} \qquad M_1(x) = \tfrac{1}{4}w_0ax$$

Cortando ahora la viga en un punto E entre C y B, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción AE (figura 5.17*c*). Reemplazando la carga distribuida por la carga concentrada equivalente, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad \tfrac{1}{4}w_0a - w_0(x-a) - V_2 = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \qquad -\tfrac{1}{4}w_0ax + w_0(x-a)[\tfrac{1}{2}(x-a)] + M_2 = 0$$

y se concluye que, en el intervalo $a < x < 2a$, el cortante y el momento flector se expresan, respectivamente, con las funciones

$$V_2(x) = \tfrac{1}{4}w_0a - w_0(x-a) \qquad \text{y} \qquad M_2(x) = \tfrac{1}{4}w_0ax - \tfrac{1}{2}w_0(x-a)^2$$

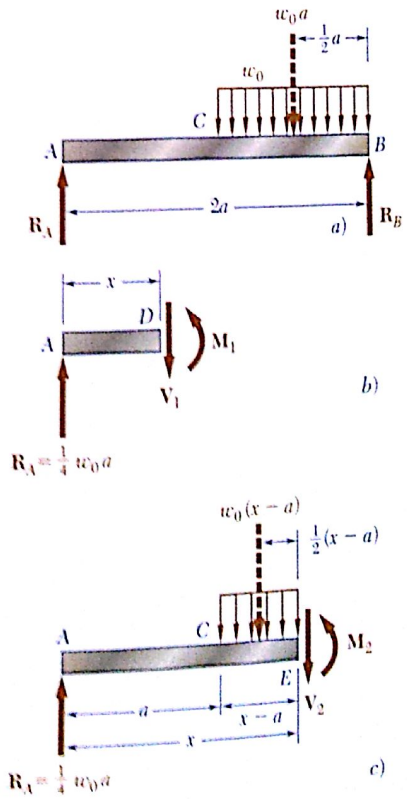


Figura 5.17

Generated by CamScanner from intsig.com

Como se señaló anteriormente en esta sección, el hecho de que el cortante y el momento flector estén representados por diferentes funciones de x, dependiendo de si x es menor o mayor que a, se debe a la discontinuidad de la carga en la viga. Sin embargo, las funciones $V_1(x)$ y $V_2(x)$ pueden representarse por la expresión única

$$V(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0\langle x - a\rangle \tag{5.11}$$

si se especifica que el segundo término deberá incluirse en los cálculos cuando $x \geq a$ e ignorarse cuando $x < a$. En otras palabras, *los corchetes* $\langle\ \rangle$ *deberán reemplazarse por paréntesis ordinarios* $(\ )$ *cuando* $x \geq a$ *y por cero cuando* $x < a$. Con la misma convención, el momento flector puede representarse en cualquier punto de la viga por la expresión única

$$M(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a x - \tfrac{1}{2}w_0\langle x - a\rangle^2 \tag{5.12}$$

De la convención que se ha adoptado, se entiende que los corchetes $\langle\ \rangle$ pueden derivarse o integrarse como paréntesis ordinarios. En lugar de calcular el momento flector a partir de diagramas de cuerpo libre, podría haberse utilizado el método indicado en la sección 5.3 e integrar la expresión obtenida para $V(x)$:

$$M(x) - M(0) = \int_0^x V(x)\,dx = \int_0^x \tfrac{1}{4}w_0 a\,dx - \int_0^x w_0\langle x - a\rangle\,dx$$

Después de la integración, y observando que $M(0) = 0$, se obtiene, como antes,

$$M(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a x - \tfrac{1}{2}w_0\langle x - a\rangle^2$$

Además, empleando la misma convención, se observa que la carga distribuida en cualquier punto de la viga puede expresarse como

$$w(x) = w_0\langle x - a\rangle^0 \tag{5.13}$$

De hecho, los corchetes deberán reemplazarse por cero para $x < a$ y por paréntesis para $x \geq a$; entonces, se verifica que $w(x) = 0$ para $x < a$ y, definiendo la potencia cero para cualquier número como la unidad, que $\langle x - a\rangle^0 = (x - a)^0 = 1$ y que $w(x) = -w_0$ para $x \geq a$. De la sección 5.3 recuerde que es posible obtener el cortante integrando la función $-w(x)$. Observando que $V = \frac{1}{4}w_0 a$ para $x = 0$, se escribe

$$V(x) - V(0) = -\int_0^x w(x)\,dx = -\int_0^x w_0\langle x - a\rangle^0\,dx$$

$$V(x) - \tfrac{1}{4}w_0 a = -w_0\langle x - a\rangle^1$$

Despejando $V(x)$ y eliminando el exponente 1, se obtiene nuevamente

$$V(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0\langle x - a\rangle$$

Generated by CamScanner from intsig.com

Las expresiones $\langle x-a\rangle^0$, $\langle x-a\rangle$, $\langle x-a\rangle^2$ se conocen como *funciones de singularidad*. Por definición se tiene, para $n \geq 0$,

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \tag{5.14}$$

También se advierte que siempre que la cantidad entre los corchetes sea positiva o cero, los corchetes deberán reemplazarse por paréntesis ordinarios; en cambio, si la cantidad es negativa, el corchete mismo es igual a cero.

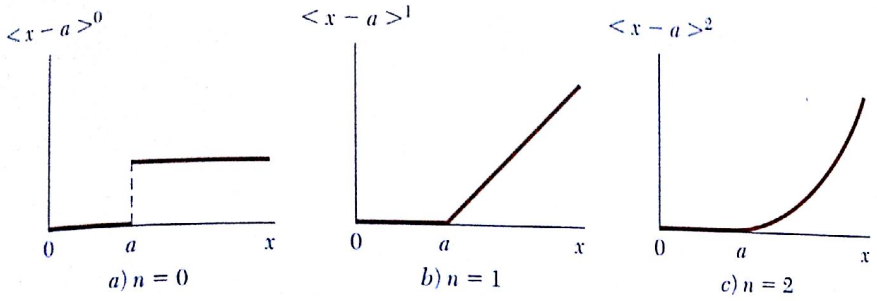


Figura 5.18

Las tres funciones de singularidad que corresponden respectivamente a $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$ se han graficado en la figura 5.18. Se observa que la función $\langle x-a\rangle^0$ es discontinua en $x = a$ y que tiene la forma de un escalón. Por tal razón recibe el nombre de *función escalón*. De acuerdo con la ecuación (5.14), y con la potencia cero de cualquier número definida como la unidad, se tiene:†

$$\langle x-a\rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \tag{5.15}$$

De esto se sigue, de la definición de las funciones de singularidad, que

$$\int \langle x-a\rangle^n \, dx = \frac{1}{n+1}\langle x-a\rangle^{n+1} \qquad \text{para } n \geq 0 \tag{5.16}$$

y

$$\frac{d}{dx}\langle x-a\rangle^n = n\langle x-a\rangle^{n-1} \qquad \text{para } n \geq 1 \tag{5.17}$$

La mayoría de las cargas de viga encontradas en la práctica de la ingeniería pueden reducirse a las cargas básicas que se muestran en la figura 5.19. Dondequiera que sean aplicables, las funciones correspondientes $w(x)$, $V(x)$ y $M(x)$ se han expresado en términos de funciones de singularidad y graficadas contra un fondo de color. Se utilizó el fondo con color más intenso con el fin de indicar, para cada carga, la expresión que más fácilmente se deduce o recuerda y de la que otras funciones pueden encontrarse por integración.

† Como $(x-a)^0$ es discontinua en $x = a$, puede argumentarse que esta función debería dejarse indefinida para $x = a$ o que debería asignársele tanto el valor de 0 como el de 1 para $x = a$. Sin embargo, definir a $(x-a)^0$ como igual a 1 cuando $x = a$, como se estableció en la ecuación (5.15), tiene la ventaja de no ser ambiguo y, por tanto, directamente aplicable a la programación de computadoras (véase página 348).

Generated by CamScanner from intsig.com

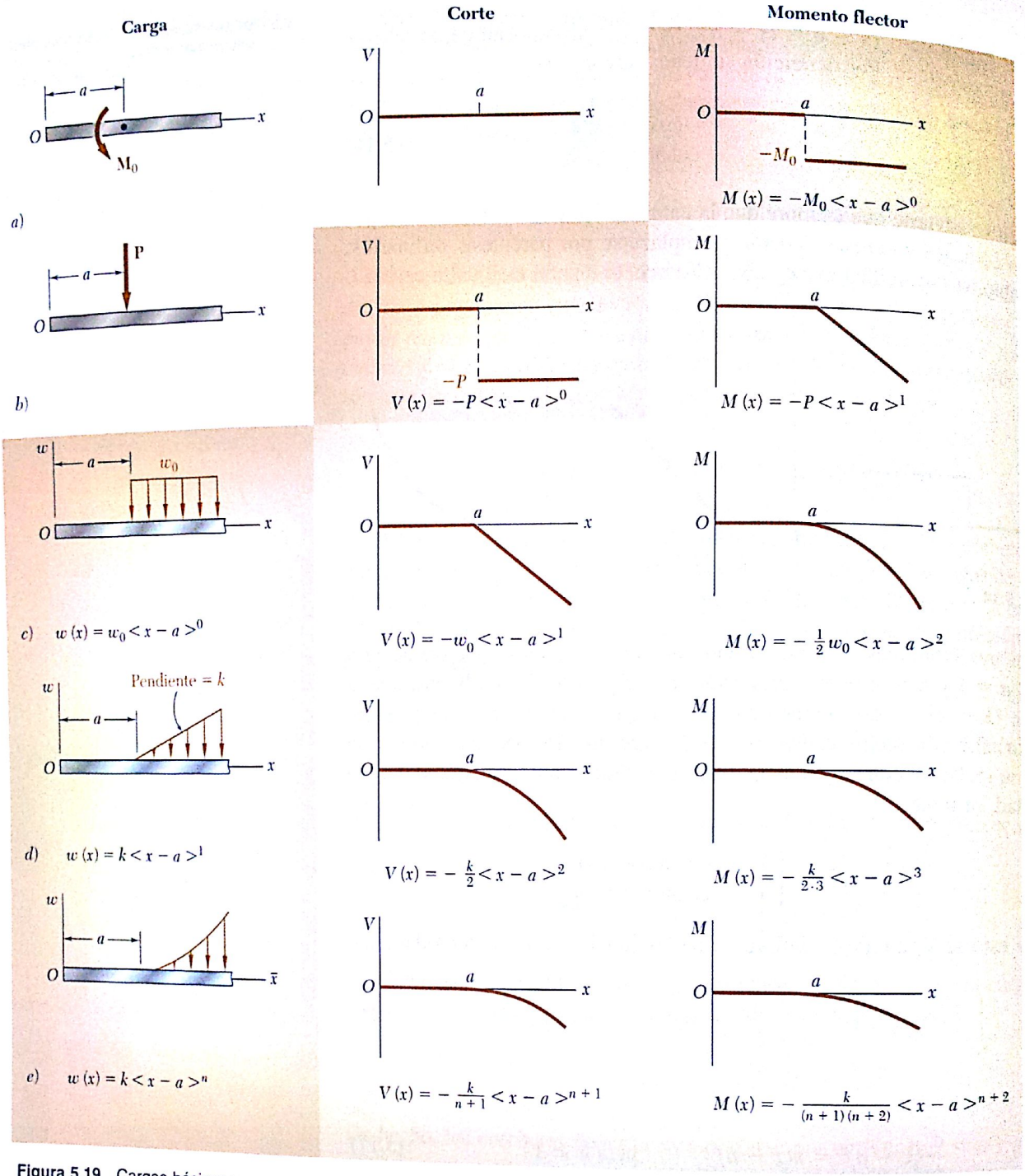


Figura 5.19 Cargas básicas y sus correspondientes cortes y momentos flectores expresados en términos de funciones de singularidad.

Después de que una carga dada de una viga se ha dividido en las cargas básicas de la figura 5.19, las funciones $V(x)$ y $M(x)$ que representan el cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga pueden obtenerse sumando las funciones correspondientes asociadas con cada una de las cargas y reacciones básicas. Ya que todas las cargas distribuidas mostradas en la figura 5.19 son abiertas a la derecha, una carga distribuida que no se extiende hasta el extremo derecho de la viga o que es discontinua deberá reemplazarse como se muestra en la figura 5.20 por una combinación equivalen-

Generated by CamScanner from intsig.com

te de cargas con extremo abierto (véase también el ejemplo 5.05 y el problema modelo 5.9).

Como se verá en la sección 9.6, el uso de funciones de singularidad simplifica mucho más la determinación de las deflexiones de la viga que el enfoque utilizado en esta sección. Tal método fue sugerido primero por el matemático alemán A. Clebsch (1833-1872). Sin embargo, es el matemático e ingeniero británico W. H. Macaulay (1853-1936) quien recibe comúnmente el crédito de introducir las funciones de singularidad en la forma utilizada aquí, por lo que los corchetes $\langle\ \rangle$ generalmente reciben el nombre de *corchetes de Macaulay.*[†]

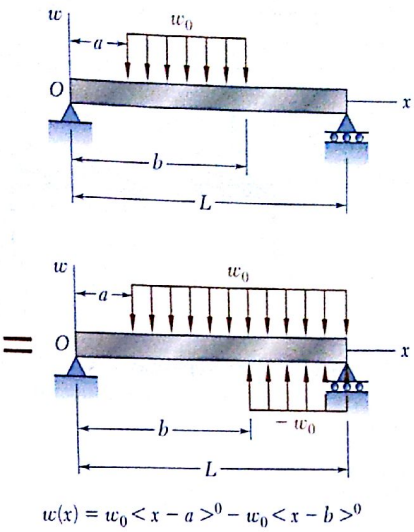


Figura 5.20

[†] W. H. Macaulay, "Note on the Deflection of Beams," en *Messenger of Mathematics*, vol. 48, pp. 129-130, 1919.

EJEMPLO 5.05

Para la viga y carga mostradas (figura 5.21*a*) y usando funciones de singularidad, exprese el corte y el momento flector como funciones de la distancia x desde el apoyo en A.

Primero se determina la reacción en A dibujando el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 5.21*b*) y escribiendo

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -A_y(3.6\text{ m}) + (1.2\text{ kN})(3\text{ m}) + (1.8\text{ kN})(2.4\text{ m}) + 1.44\text{ kN}\cdot\text{m} = 0$$

$$A_y = 2.60\text{ kN}$$

A continuación, se reemplaza la carga distribuida por dos cargas equivalentes abiertas a la derecha (figura 5.21*c*) y se expresa la carga distribuida $w(x)$ como la suma de las funciones escalón correspondientes:

$$w(x) = +w_0\langle x - 0.6\rangle^0 - w_0\langle x - 1.8\rangle^0$$

La función $V(x)$ se obtiene integrando $w(x)$, invirtiendo los signos + y −; al resultado se le suman las constantes A_y y $-P\langle x - 0.6\rangle^0$ que representan las contribuciones respectivas al cortante de la reacción en A y de la carga concentrada. (No se requiere ninguna otra constante de integración.) Puesto que el par concentrado no afecta directamente al cortante, deberá ignorarse en este cálculo. Se escribe

$$V(x) = -w_0\langle x - 0.6\rangle^1 + w_0\langle x - 1.8\rangle^1 + A_y - P\langle x - 0.6\rangle^0$$

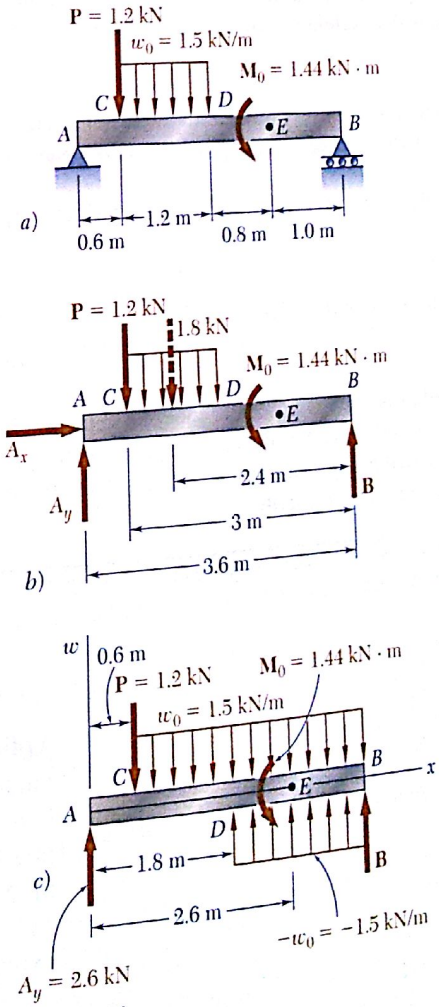


Figura 5.21

Generated by CamScanner from intsig.com

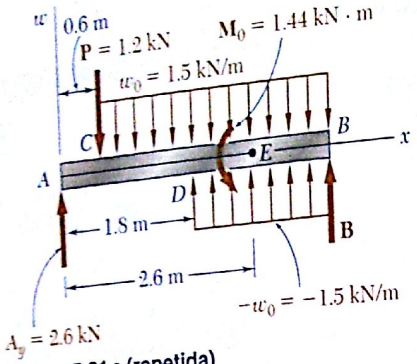


Figura 5.21c (repetida)

De manera similar se obtiene la función $M(x)$ integrando $V(x)$ y sumando al resultado la constante $-M_0\langle x - 2.6\rangle^0$ que representa la contribución del par concentrado en el momento flector. Se tiene

$$M(x) = -\tfrac{1}{2}w_0\langle x - 0.6\rangle^2 + \tfrac{1}{2}w_0\langle x - 1.8\rangle^2 + A_y x - P\langle x - 0.6\rangle^1 - M_0\langle x - 2.6\rangle^0$$

Sustituyendo los valores numéricos de las reacciones y cargas en las expresiones obtenidas para $V(x)$ y $M(x)$ y teniendo la precaución de *no* calcular ningún producto o expandir ningún cuadrado que involucre un juego de corchetes, se obtienen las siguientes expresiones para el cortante y para el momento flector en cualquier punto de la viga:

$$V(x) = -1.5\langle x - 0.6\rangle^1 + 1.5\langle x - 1.8\rangle^1 + 2.6 - 1.2\langle x - 0.6\rangle^0$$

$$M(x) = -0.75\langle x - 0.6\rangle^2 + 0.75\langle x - 1.8\rangle^2 + 2.6x - 1.2\langle x - 0.6\rangle^1 - 1.44\langle x - 2.6\rangle^0$$

EJEMPLO 5.06

Para la viga y la carga del ejemplo 5.05, determine los valores numéricos del cortante y del momento flector en el punto central D.

Haciendo que $x = 1.8$ m en las expresiones encontradas para $V(x)$ y para $M(x)$ en el ejemplo 5.05, se obtiene

$$V(1.8) = -1.5\langle 1.2\rangle^1 + 1.5\langle 0\rangle^1 + 2.6 - 1.2\langle 1.2\rangle^0$$

$$M(1.8) = -0.75\langle 1.2\rangle^2 + 0.75\langle 0\rangle^2 + 2.6(1.8) - 1.2\langle 1.2\rangle^1 - 1.44\langle -0.8\rangle^0$$

Recordando que siempre que una cantidad entre corchetes es positiva o cero, los corchetes deben reemplazarse por paréntesis ordinarios y, siempre que la cantidad sea negativa, el corchete mismo es igual a cero, se escribe

$$V(1.8) = -1.5(1.2)^1 + 1.5(0)^1 + 2.6 - 1.2(1.2)^0$$
$$= -1.5(1.2) + 1.5(0) + 2.6 - 1.2(1)$$
$$= -1.8 + 0 + 2.6 - 1.2$$
$$V(1.8) = -0.4 \text{ kN}$$

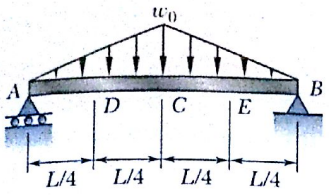
y

$$M(1.8) = -0.75(1.2)^2 + 0.75(0)^2 + 2.6(1.8) - 1.2(1.2)^1 - 1.44(0)$$
$$= -1.08 + 0 + 4.68 - 1.44 - 0$$
$$M(1.8) = +2.16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Aplicación a la programación de computadoras. Las funciones de singularidad se han adaptado bien a su uso en computadoras. Primero se advierte que la función escalón $\langle x - a\rangle^0$, que se representará por el símbolo ESC, puede definirse por una instrucción tipo IF/THEN/ELSE como igual a 1 para X ≥ A y 0 para otros casos. Cualquier otra función de singularidad $\langle x - a\rangle^n$, donde $n \geq 1$, puede expresarse, entonces, como el producto de la expresión algebraica $(x - a)^n$ y la función escalón $\langle x - a\rangle^0$.

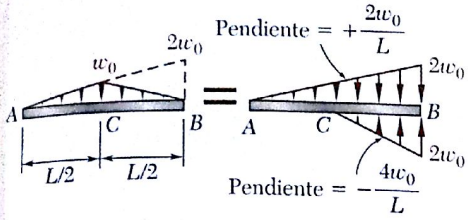
Cuando se encuentran involucradas k diferentes funciones de singularidad, tales como $\langle x - a_i\rangle^n$, donde $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces deben definirse las correspondientes funciones ESC(I), donde I = 1, 2,..., K en un lazo que contenga una instrucción IF/THEN/ELSE única.

Generated by CamScanner from intsig.com



PROBLEMA MODELO 5.9

Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector en cualquier punto, *b*) el cortante y el momento flector en los puntos *C*, *D* y *E*.

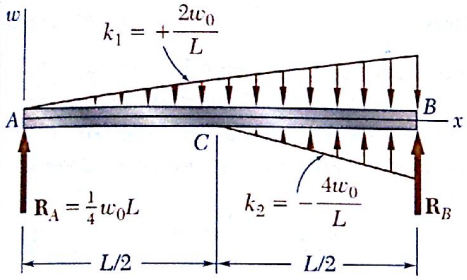


SOLUCIÓN

Reacciones. La carga total es $\frac{1}{2}w_0L$; debido a la simetría, cada reacción es igual a la mitad de ese valor, esto es, $\frac{1}{4}w_0L$.

Carga distribuida. La carga distribuida dada es reemplazada por dos cargas abiertas equivalentes como se indica. Empleando una función de singularidad para expresar la segunda carga, se escribe

$$w(x) = k_1x + k_2\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle = \frac{2w_0}{L}x - \frac{4w_0}{L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle \tag{1}$$

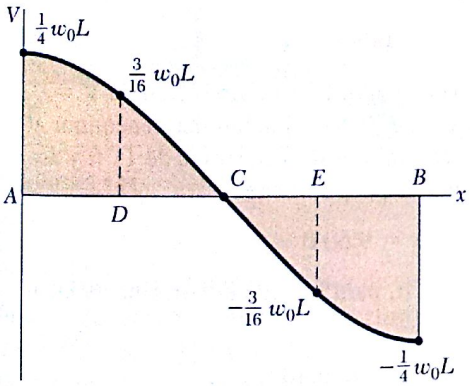


***a*) Ecuaciones para el cortante y el momento flector.** Se obtiene $V(x)$ integrando (1), cambiando los signos y sumando una constante igual a R_A:

$$V(x) = -\frac{w_0}{L}x^2 + \frac{2w_0}{L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \tag{2}$$ ◀

Se obtiene $M(x)$ integrando la ecuación (2); ya que no hay par concentrado, no se necesita constante de integración:

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx \tag{3}$$ ◀



b*) Cortante y momento flector en *C*, *D* y *E

En el punto C: Haciendo $x = \frac{1}{2}L$ en las ecuaciones (2) y (3), y recordando que cuando una cantidad entre corchetes es positiva o cero, los corchetes pueden reemplazarse por paréntesis, se tiene

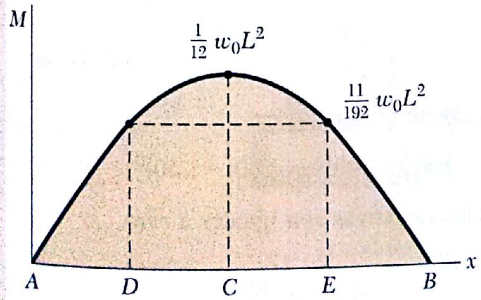
$$V_C = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{1}{2}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle 0\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_C = 0$$ ◀

$$M_C = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{1}{2}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle 0\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{1}{2}L) \qquad M_C = \frac{1}{12}w_0L^2$$ ◀

En el punto D: Haciendo $x = \frac{1}{4}L$ en las ecuaciones (2) y (3), y recordando que un corchete que contenga una cantidad negativa es igual a cero, se escribe

$$V_D = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{1}{4}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle -\tfrac{1}{4}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_D = \frac{3}{16}w_0L$$ ◀

$$M_D = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{1}{4}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle -\tfrac{1}{4}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{1}{4}L) \qquad M_D = \frac{11}{192}w_0L^2$$ ◀



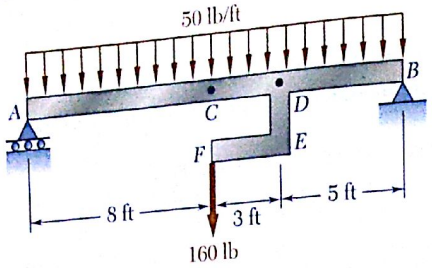
En el punto E: Haciendo $x = \frac{3}{4}L$ en las ecuaciones (2) y (3), se tiene

$$V_E = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{3}{4}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_E = -\frac{3}{16}w_0L$$ ◀

$$M_E = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{3}{4}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{3}{4}L) \qquad M_E = \frac{11}{192}w_0L^2$$ ◀

Generated by CamScanner from intsig.com

PROBLEMA MODELO 5.10



La barra rígida *DEF* se encuentra soldada en el punto *D* a una viga de acero *AB*. Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga, *b*) la localización y magnitud del máximo momento flector.

SOLUCIÓN

Reacciones. Se consideran la viga y la barra como un cuerpo libre y se observa que la carga total es de 960 lb. Debido a la simetría, cada reacción es igual a 480 lb.

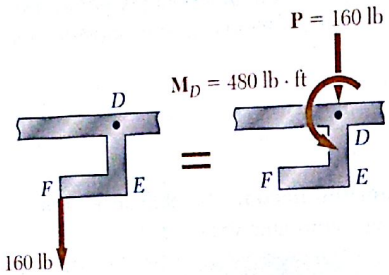
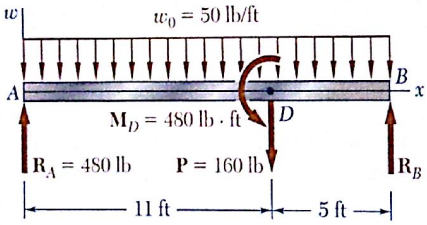


Diagrama modificado de carga. Se reemplaza la carga de 160 lb aplicada en *F* por un sistema equivalente de fuerza y momento en *D*. Así se obtiene un diagrama de carga que consiste en un par concentrado, tres cargas concentradas (incluyendo las dos reacciones) y una carga uniformemente distribuida

$$w(x) = 50 \text{ lb/ft} \tag{1}$$

a) **Ecuaciones para cortante y momento flector.** Se obtiene $V(x)$ integrando la ecuación (1), cambiando el signo y sumando las constantes que representan las contribuciones respectivas de $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{P}$ al cortante. Como $\mathbf{P}$ afecta a $V(x)$ sólo para valores de x mayores de 11 ft, se utiliza una función escalón para expresar su contribución.

$$V(x) = -50x + 480 - 160\langle x - 11\rangle^0 \tag{2}$$ ◀



Se obtiene $M(x)$ integrando la ecuación (2) y utilizando una función escalón para representar la contribución del par concentrado $\mathbf{M}_D$:

$$M(x) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11\rangle^1 - 480\langle x - 11\rangle^0 \tag{3}$$ ◀

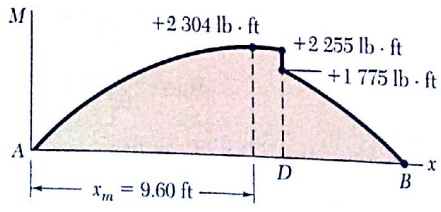
b) **Máximo momento flector.** Como M es máximo o mínimo cuando $V = 0$, se hace $V = 0$ en la ecuación (2) y se despeja x de dicha ecuación para encontrar el máximo momento flector. Considerando primero valores de x menores de 11 ft y notando que para tales valores el corchete es igual a cero, se tiene

$$-50x + 480 = 0 \qquad x = 9.60 \text{ ft}$$

Considerando ahora valores de x mayores de 11 ft, para los que el corchete es igual a 1, se tiene que

$$-50x + 480 - 160 = 0 \qquad x = 6.40 \text{ ft}$$

Ya que este valor *no* es mayor de 11 ft, debe rechazarse. Así, el valor de x correspondiente al momento flector máximo es



$$x_m = 9.60 \text{ ft}$$ ◀

Sustituyendo este valor de x en la ecuación (3), se obtiene

$$M_{\text{máx}} = -25(9.60)^2 + 480(9.60) - 160\langle -1.40\rangle^1 - 480\langle -1.40\rangle^0$$

y, recordando que los corchetes con cantidades negativas son iguales a cero,

$$M_{\text{máx}} = -25(9.60)^2 + 480(9.60)$$

$$M_{\text{máx}} = 2\,304 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$ ◀

Se ha graficado el diagrama de momento flector. Note la discontinuidad en el punto *D* debida al par concentrado aplicado en ese punto. Los valores de M justo a la izquierda y justo a la derecha de *D* se obtuvieron haciendo $x = 11$ en la ecuación (3) y reemplazando la función escalón $\langle x - 11\rangle^0$ por 0 y por 1, respectivamente.

Generated by CamScanner from intsig.com

PROBLEMAS

5.98 a 5.100 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Mediante la ecuación obtenida para M determine el momento flector en el punto C y verifique la respuesta con el trazo del diagrama de cuerpo libre de la viga completa.

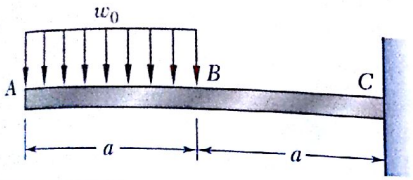


Figura P5.98

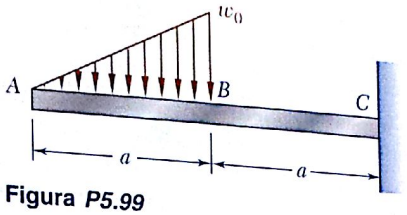


Figura *P5.99*

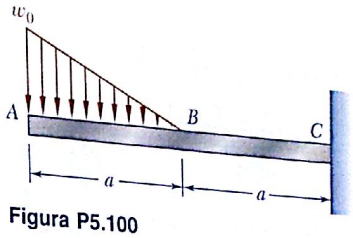


Figura P5.100

5.101 a *5.103* *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Mediante la ecuación obtenida para M determine el momento flector en el punto E y verifique la respuesta con el trazo del diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga a la derecha de E.

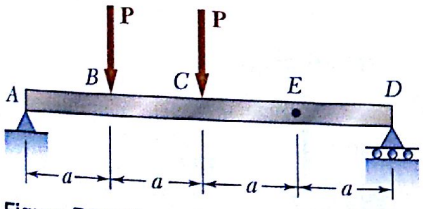


Figura P5.101

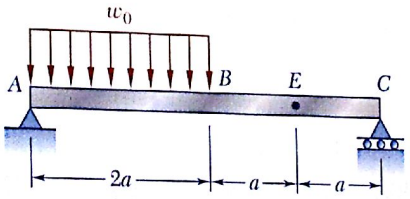


Figura P5.102

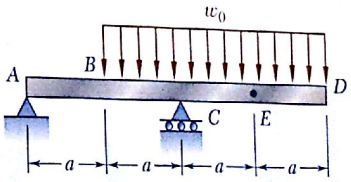


Figura *P5.103*

5.104 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga ABC bajo las cargas que se muestran en la figura. *b*) Utilice la ecuación obtenida para M a fin de calcular el momento flector justo a la derecha del punto D.

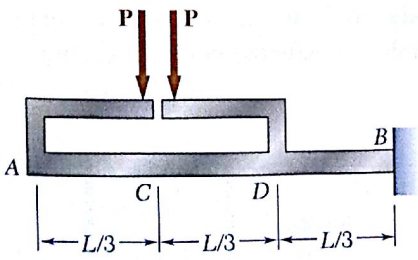


Figura P5.104

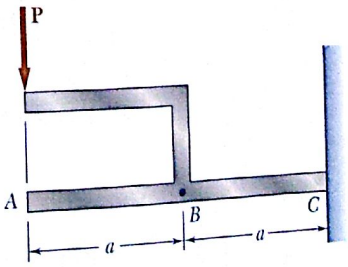


Figura P5.105

5.105 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga ABC bajo la carga mostrada en la figura. *b*) Utilice la ecuación obtenida para M a fin de calcular el momento flector justo a la derecha del punto B.

Generated by CamScanner from intsig.com

5.106 a 5.109 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Determine el máximo valor del momento flector en la viga.

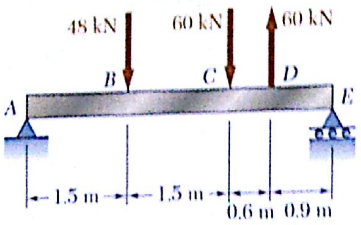


Figura P5.106

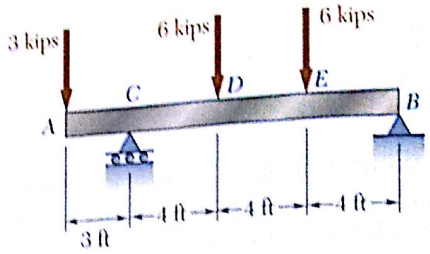


Figura P5.107

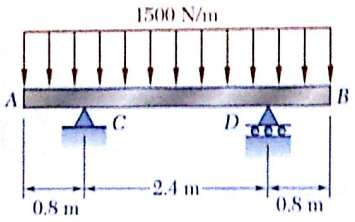


Figura P5.108

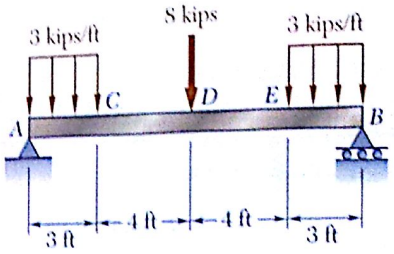


Figura P5.109

5.110 y *5.111* *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

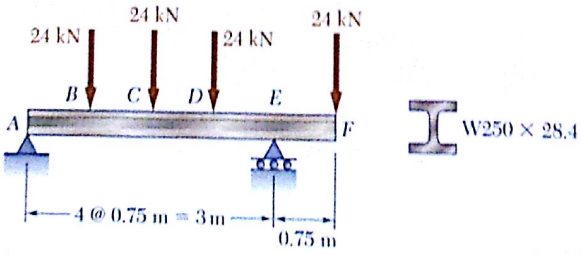


Figura P5.110

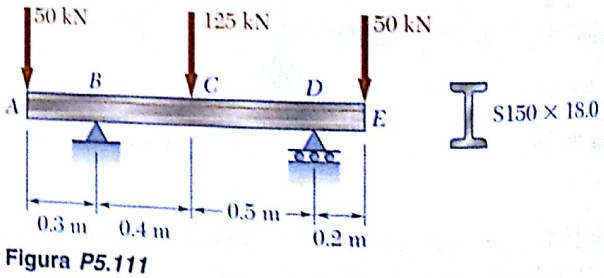


Figura *P5.111*

5.112* y *5.113 *a*) Utilice funciones de singularidad para encontrar la magnitud y la localización del momento flector máximo para la viga y la carga que se muestran en las figura. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

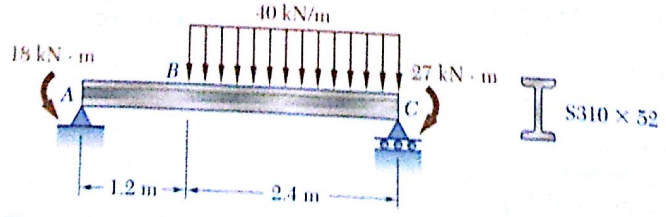


Figura *P5.112*

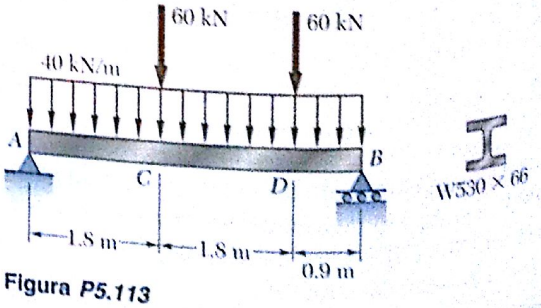


Figura *P5.113*

Generated by CamScanner from intsig.com

5.114 y 5.115 Una viga está diseñada con los apoyos y las cargas que se muestran en la figura. *a*) Utilice funciones de singularidad para encontrar la magnitud y la localización del máximo momento flector en la viga. *b*) Si el esfuerzo permisible para el acero que se utilizará es de 24 ksi, encuentre el perfil de patín ancho más económico que debe seleccionarse.

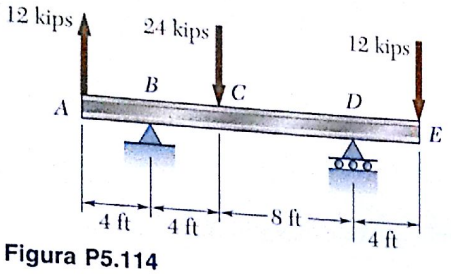


Figura P5.114

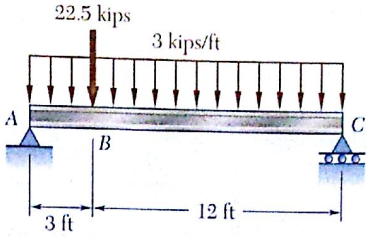


Figura P5.115

5.116 y *5.117* Una viga de madera está diseñada con los apoyos y las cargas que se muestran en la figura. *a*) Utilice funciones de singularidad para determinar la magnitud y localización del momento flector máximo en la viga. *b*) Si el material disponible consiste en vigas con un esfuerzo permisible de 12 MPa y una sección transversal rectangular de 30 mm de ancho y de espesor h que varía de 80 a 160 mm en incrementos de 10 mm, determine la sección transversal más económica que puede utilizarse.

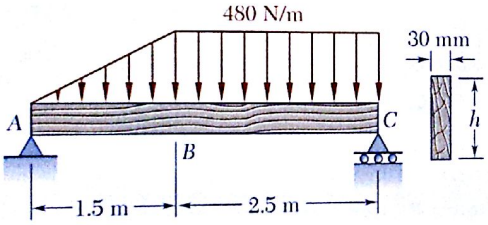


Figura P5.116

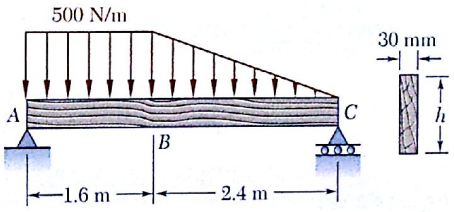


Figura *P5.117*

5.118 a 5.121 Utilice una computadora y funciones escalón para calcular el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en las figuras. Emplee los incrementos especificados para ΔL, empezando en el punto A y terminando en el apoyo de la derecha.

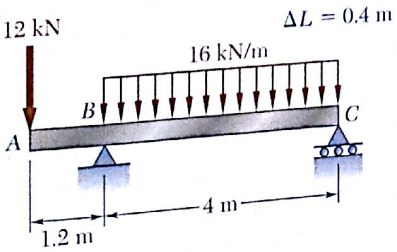


Figura P5.118

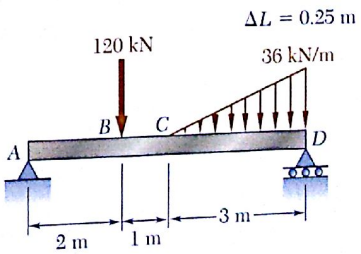


Figura P5.119

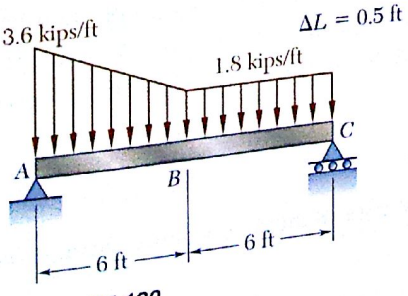


Figura *P5.120*

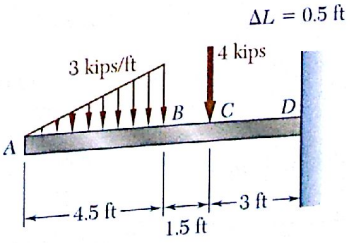


Figura P5.121

Generated by CamScanner from intsig.com

5.122 y 5.123 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, y usando una computadora y funciones escalón, *a*) tabule el cortante, el momento flector y el esfuerzo normal máximo en secciones de la viga desde $x = 0$ hasta $x = L$, utilizando los incrementos ΔL indicados, *b*) empleando incrementos más pequeños si es necesario, determine, con una exactitud de 2%, el esfuerzo normal máximo en la viga. Ubique el origen del eje x en el extremo A de la viga.

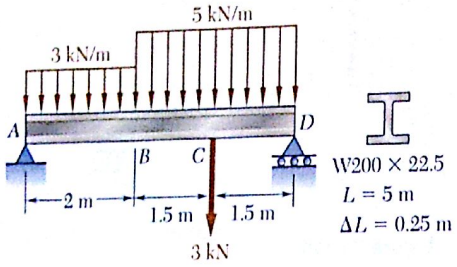


Figura P5.122

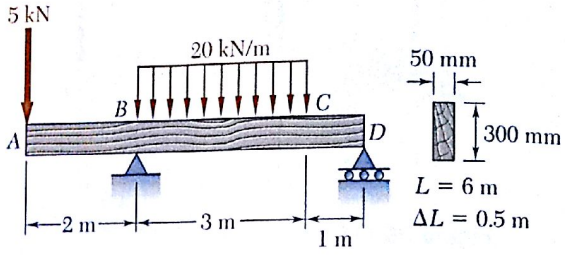


Figura P5.123

5.124 y *5.125* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, y utilizando una computadora y funciones escalón, *a*) tabule el cortante, el momento flector y el esfuerzo normal máximo en secciones de la viga desde $x = 0$ hasta $x = L$, usando los incrementos ΔL indicados, *b*) empleando incrementos más pequeños si es necesario, determine, con una exactitud de 2%, el esfuerzo normal máximo en la viga. Ubique el origen del eje x en el extremo A de la viga.

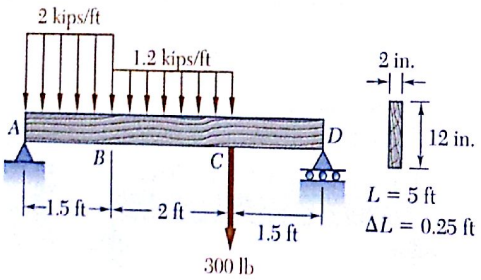


Figura P5.124

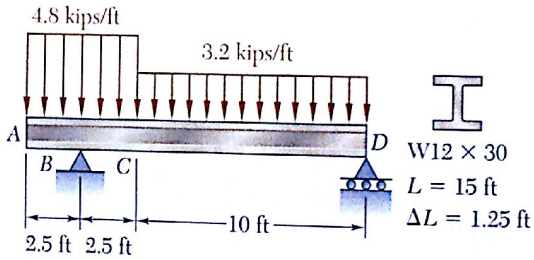


Figura *P5.125*

*5.6 VIGAS NO PRISMÁTICAS

Hasta ahora el presente análisis se ha restringido a vigas prismáticas, es decir, a vigas con sección transversal uniforme. Como se vio en la sección 5.4, las vigas prismáticas se diseñan de tal manera que los esfuerzos normales en sus secciones críticas sean iguales al valor permisible del esfuerzo normal para el material que se utiliza; por lo tanto, en otras secciones, los esfuerzos normales serán más pequeños, posiblemente mucho más pequeños, que sus valores permisibles. Esto significa que una viga prismática, casi siempre está sobrediseñada, y que es posible lograr un considerable ahorro de material utilizando vigas no prismáticas, es decir, vigas con sección transversal variable. La viga fundida en voladizo utilizada en la máquina de ensayo para sueños representada en la figura 5.22 es una viga de este tipo.

Como los esfuerzos normales máximos σ_m generalmente condicionan el diseño de una viga, el diseño de una viga no prismática será óptimo si el módulo de sección $S = I/c$ de cada sección transversal satisface la ecuación (5.3) de la sección 5.1. Despejando S de dicha ecuación, se escribe

$$S = \frac{|M|}{\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.18}$$

Una viga diseñada de esta manera se conoce como *viga de resistencia constante*.

Generated by CamScanner from intsig.com

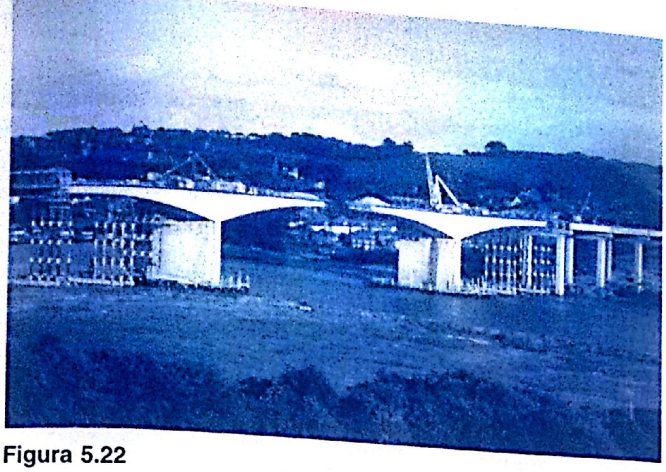


Figura 5.22

Para un componente fundido o forjado estructural o de una máquina, es posible variar la sección transversal del componente a lo largo de su longitud y eliminar la mayor parte del material innecesario (véase ejemplo 5.07). Para una viga de madera o una viga de acero laminado, sin embargo, no es posible variar la sección transversal de la viga. Pero puede lograrse considerable ahorro de material pegando tablas de madera de longitudes apropiadas a una viga de madera (véase problema modelo 5.11) y usando postizos en porciones de una viga de acero laminado donde el momento flector es grande (véase problema modelo 5.12).

EJEMPLO 5.07

Una placa de aluminio fundido de espesor uniforme b deberá soportar una carga uniformemente distribuida w como se muestra en la figura 5.23. *a*) Determine la forma de la placa que dará el diseño más económico. *b*) Considerando que el esfuerzo normal permisible para el aluminio utilizado es de 72 MPa y que $b = 40$ mm, $L = 800$ mm y $w = 135$ kN/m, determine el ancho máximo h_0 de la placa.

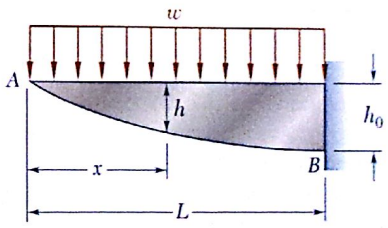


Figura 5.23

Momento flector. Midiendo la distancia x desde A y observando que $V_A = M_A = 0$, se usan las ecuaciones (5.6) y (5.8) de la sección 5.3 y se escribe

$$V(x) = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$M(x) = \int_0^x V(x)\,dx = -\int_0^x wx\,dx = -\tfrac{1}{2}wx^2$$

a) Forma de la placa. Recuerde, de la sección 5.4, que el módulo S de una sección transversal rectangular de ancho b y altura h es $S = \frac{1}{6}bh^2$. Llevando este valor a la ecuación (5.18) y despejando h^2, se tiene

$$h^2 = \frac{6|M|}{b\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.19}$$

y, tras sustituir $|M| = \frac{1}{2}wx^2$,

$$h^2 = \frac{3wx^2}{b\sigma_{\text{perm}}} \quad \text{o} \quad h = \left(\frac{3w}{b\sigma_{\text{perm}}}\right)^{1/2} x \tag{5.20}$$

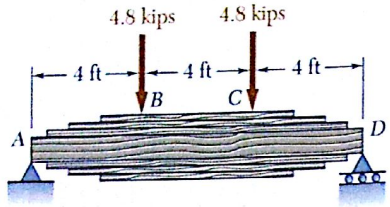
Ya que la relación entre h y x es lineal, el extremo inferior de la placa es una línea recta. Así, la placa que rinde el diseño más económico tiene *forma triangular*.

b) Ancho máximo h_0. Haciendo $x = L$ en la ecuación (5.20) y sustituyendo datos, se obtiene

$$h_0 = \left[\frac{3(135\text{ kN/m})}{(0.040\text{ m})(72\text{ MPa})}\right]^{1/2}(800\text{ mm}) = 300\text{ mm}$$

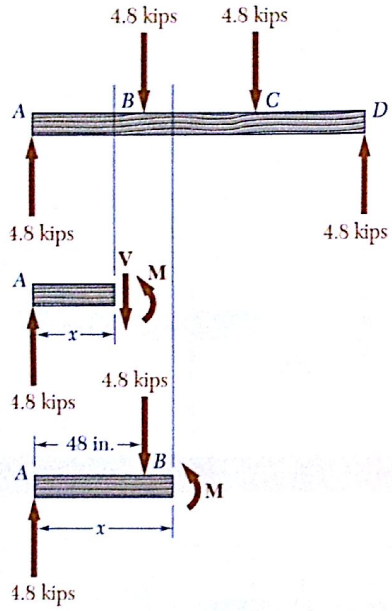
Generated by CamScanner from intsig.com

PROBLEMA MODELO 5.11



Una viga de 12 ft de largo hecha de un madero con un esfuerzo normal permisible de 2.40 ksi y un esfuerzo cortante permisible de 0.40 ksi deberá soportar dos cargas de 4.8 kips ubicadas en la tercera parte de longitud desde sus extremos. Como se explica en el capítulo 6, una viga con sección transversal rectangular uniforme, de 4 in. de ancho y 4.5 in. de espesor, satisfaría el requerimiento del esfuerzo cortante permisible. Ya que tal viga no satisfaría el requerimiento del esfuerzo normal permisible, se reforzará encolando tablas de la misma madera, de 4 in. de ancho y 1.2 in. de espesor, arriba y debajo de la viga de manera simétrica. Determine *a*) el número requerido de tablas, *b*) la longitud de las tablas de cada par que dará el diseño más económico.

SOLUCIÓN



Momento flector. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga y se encuentran las siguientes expresiones para el momento flector:

De A a B $(0 \le x \le 48 \text{ in.})$: $M = (4.80 \text{ kips})x$

De B a C $(48 \text{ in.} \le x \le 96 \text{ in.})$:

$$M = (4.80 \text{ kips})x - (4.80 \text{ kips})(x - 48 \text{ in.}) = 230.4 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$

***a*) Número de pares de tablas.** Primero se obtiene el espesor total requerido de la viga reforzada entre B y C. Se recuerda, de la sección 5.4, que $S = \frac{1}{6}bh^2$ para una viga con sección transversal rectangular con ancho b y espesor h. Sustituyendo este valor en la ecuación (5.17) y despejando h^2, se tiene

$$h^2 = \frac{6|M|}{b\sigma_{\text{perm}}} \tag{1}$$

Sustituyendo el valor obtenido para M de B a C y los valores dados de b y de σ_{perm}, se escribe

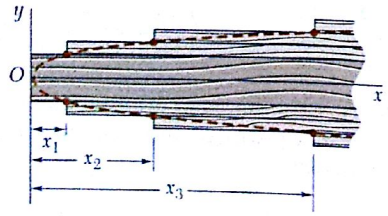
$$h^2 = \frac{6(230.4 \text{ kips} \cdot \text{in.})}{(4 \text{ in.})(2.40 \text{ ksi})} = 144 \text{ in.}^2 \qquad h = 12.00 \text{ in.}$$

Como la viga original tiene un espesor de 4.50 in., las tablas deben dar un espesor adicional de 7.50 in. Recordando que cada par de tablas es de 2.50 in. de espesor:

$$\text{Número requerido de pares de tablas} = 3 \quad \blacktriangleleft$$

***b*) Longitud de las tablas.** Se encontró que el momento flector es de $M = (4.80 \text{ kips})x$ en la porción AB de la viga. Sustituyendo esta expresión y los valores dados de b y de σ_{perm} en la ecuación (1) y despejando x se tiene

$$x = \frac{(4 \text{ in.})(2.40 \text{ ksi})}{6\,(4.80 \text{ kips})}h^2 \qquad x = \frac{h^2}{3 \text{ in.}} \tag{2}$$

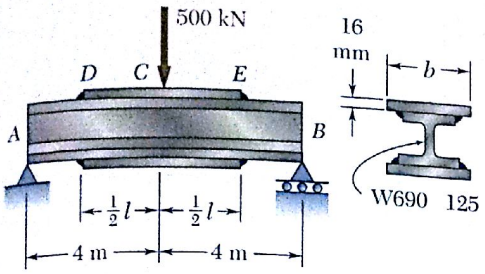


La ecuación (2) define la máxima distancia x desde el extremo A en la que un espesor dado h de la sección transversal es aceptable. Haciendo $h = 4.50$ in., se halla la distancia x_1 desde A en la que la viga prismática original es segura: $x_1 = 6.75$ in. Desde ese punto, la viga original deberá reforzarse por el primer par de tablas. Haciendo $h = 4.50 \text{ in.} + 2.50 \text{ in.} = 7.00$ in. da la distancia $x_2 = 16.33$ in. desde donde se deberá utilizar el segundo par de tablas, y haciendo $h = 9.50$ in. da la distancia $x_3 = 30.08$ in. a partir de la que deberá utilizarse el tercer par de tablas. La longitud l_i de las tablas del par i, donde $i = 1, 2, 3$ se obtiene restando $2x_i$ de la longitud de 144 in. de la viga. Se encuentra

$$l_1 = 130.5 \text{ in.}, \; l_2 = 111.3 \text{ in.}, \; l_3 = 83.8 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft$$

Las esquinas de las distintas tablas caen dentro de la parábola definida por la ecuación (2).

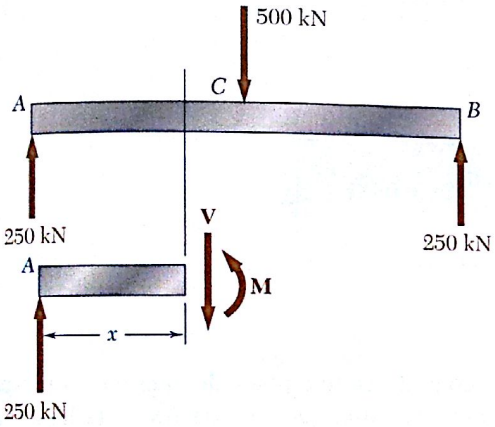
Generated by CamScanner from intsig.com



PROBLEMA MODELO 5.12

Dos placas de acero, cada una de 16 mm de espesor, se sueldan, como se indica en la figura, a una viga W690 × 125 para reforzarla. Si $\sigma_{perm} = 160$ MPa tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido de *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

SOLUCIÓN



Momento flector. Primero se encuentran las reacciones. Del diagrama de cuerpo libre de una porción de viga con longitud $x \leq 4$ m, se obtiene M entre A y C:

$$M = (250 \text{ kN})x \tag{1}$$

***a*) Longitud requerida de las placas.** Primero se obtiene la máxima longitud permisible x_m de la porción AD de la viga sin reforzar. Del apéndice C se encuentra que el módulo de sección de una viga W690 × 125 es $S = 3\,510 \times 10^6$ mm^3, o $S = 3.51 \times 10^{-3}$ m^3. Sustituyendo S y σ_{perm} en la ecuación (5.17) y despejando M, se escribe

$$M = S\sigma_{perm} = (3.51 \times 10^{-3} \text{ m}^3)(160 \times 10^3 \text{ kN/m}^2) = 561.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sustituyendo M en la ecuación (1), se tiene que

$$561.6 \text{ kN} \cdot \text{m} = (250 \text{ kN})x_m \qquad x_m = 2.246 \text{ m}$$

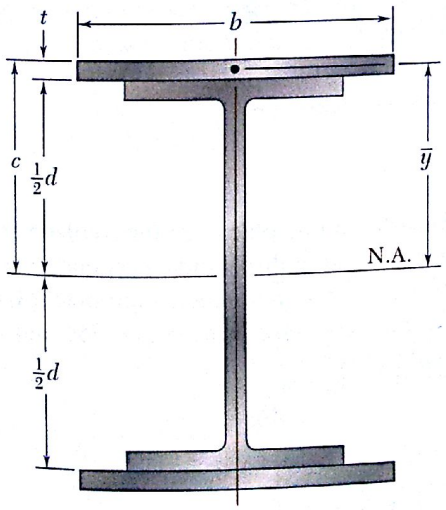
La longitud requerida l de las placas se obtiene restando $2x_m$ de la longitud de la viga:

$$l = 8 \text{ m} - 2(2.246 \text{ m}) = 3.508 \text{ m} \qquad l = 3.51 \text{ m} \blacktriangleleft$$

***b*) Ancho requerido de las placas.** El momento flector máximo ocurre a la mitad C de la viga. Haciendo $x = 4$ m en la ecuación (1), se obtiene el momento flector en dicha sección:

$$M = (250 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 1\,000 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para utilizar la ecuación (5.1) de la sección 5.1, se determina ahora el momento de inercia de la sección transversal de la viga reforzada con respecto a un eje centroidal y la distancia c desde dicho eje a las superficies exteriores de las placas. Del apéndice C se encuentra que el momento de inercia de una viga W690 × 125 es $I_b = 1\,190 \times 10^6$ mm^4 y que su altura es $d = 678$ mm. Por otra parte, denotando por t el espesor de una placa, por b su ancho y por $\bar{y}$ la distancia de su centroide al eje neutro, se expresa el momento de inercia I_p de las dos placas con respecto al eje neutro:



$$I_p = 2(\tfrac{1}{12} bt^3 + A\bar{y}^2) = (\tfrac{1}{6} t^3)b + 2\, bt(\tfrac{1}{2} d + \tfrac{1}{2} t)^2$$

Sustituyendo $t = 16$ mm y $d = 678$ mm, se obtiene $I_p = (3.854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b$. El momento de inercia I de la viga y de las placas es

$$I = I_b + I_p = 1\,190 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b \tag{2}$$

y la distancia desde el eje neutro a la superficie es $c = \frac{1}{2} d + t = 355$ mm. Despejando I de la ecuación (5.1) y sustituyendo los valores de M, σ_{perm} y c, se escribe:

$$I = \frac{|M|c}{\sigma_{perm}} = \frac{(1\,000 \text{ kN} \cdot \text{m})(355 \text{ mm})}{160 \text{ MPa}} = 2.219 \times 10^{-3} \text{ m}^4 = 2\,219 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Reemplazando I por este valor en la ecuación (2) y despejando b, se tiene

$$2\,219 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1\,190 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b$$

$$b = 267 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

Generated by CamScanner from intsig.com

5.126 y 5.127 La viga AB, que consiste de una placa de hierro colado de espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga que se muestra en la figura. *a*) Si la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en términos de x, L y h_0. *b*) Determine la carga máxima permisible si $L = 36$ in., $h_0 = 12$ in., $b = 1.25$ in. y $\sigma_{perm} = 24$ ksi.

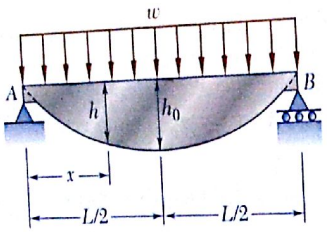


Figura P5.126

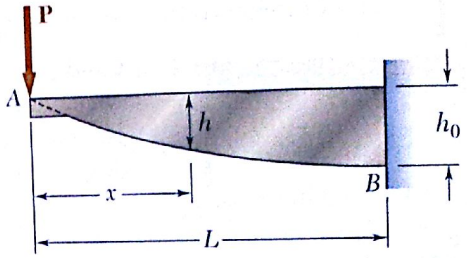


Figura P5.127

5.128 y *5.129* La viga AB, que consiste en una placa de aluminio con espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga que se muestra en la figura. *a*) Si la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en términos de x, L y h_0 para la porción AC de la viga. *b*) Determine la máxima carga permisible si $L = 800$ mm, $h_0 = 200$ mm, $b = 25$ mm y $\sigma_{perm} = 72$ MPa.

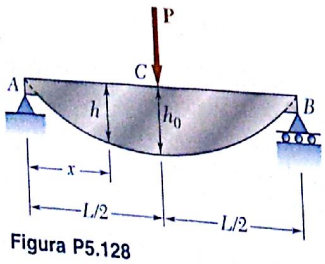


Figura P5.128

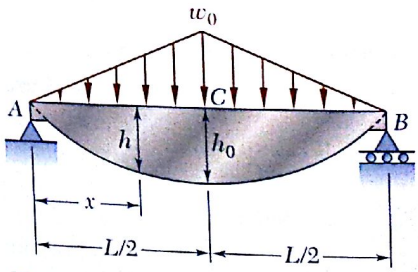


Figura *P5.129*

***5.130* y 5.131** La viga AB, que consiste en una placa de hierro colado de espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga distribuida $w(x)$ que se muestra en la figura. *a*) Si se sabe que la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en términos de x, L y h_0. *b*) Determine el mínimo valor de h_0 si $L = 750$ mm, $b = 30$ mm, $w_0 = 300$ kN/m y $\sigma_{perm} = 200$ MPa.

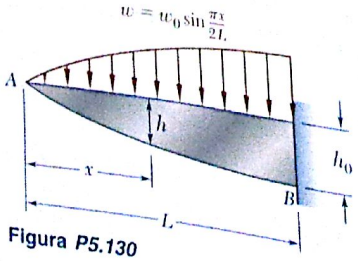


Figura *P5.130*

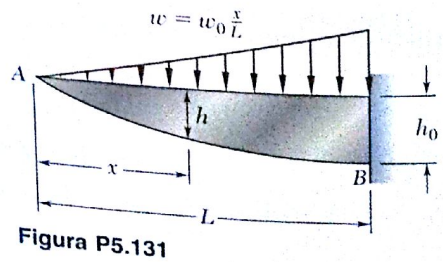


Figura P5.131

Generated by CamScanner from intsig.com

5.132 y *5.133* Un diseño preliminar basado en el uso de una viga prismática en voladizo indicó que se requeriría una viga con una sección transversal rectangular de 2 in. de ancho y 10 in. de espesor para soportar con seguridad la carga que se observa en la parte *a*) de la figura. Después se decidió reemplazar dicha viga con una viga ensamblada obtenida al pegar, como se indica en la parte *b*) de la figura, cinco piezas de la misma madera que la viga original y de sección transversal de 2 × 2 in. Determine las longitudes respectivas l_1 y l_2 de las dos piezas interiores y exteriores de madera que darán el mismo factor de seguridad que el diseño original.

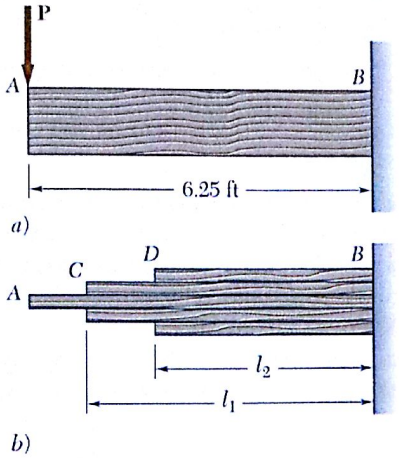


Figura P5.132

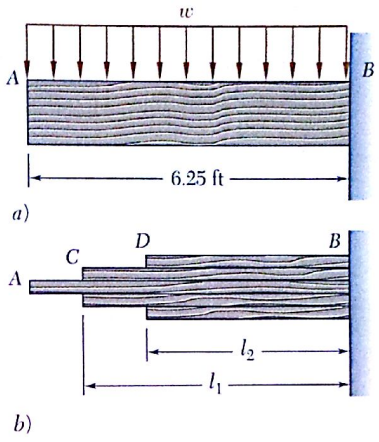


Figura *P5.133*

5.134 y 5.135 Un diseño preliminar basado en el uso de una viga prismática de madera simplemente apoyada indicó que se requeriría una viga con una sección transversal rectangular de 50 mm de ancho y 200 mm de espesor para soportar con seguridad la carga que se muestra en la parte *a*) de la figura. Después se decidió reemplazar dicha viga con una viga ensamblada obtenida al pegar, como se observa en la parte *b*) de la figura, cuatro piezas de la misma madera que la viga original y de sección transversal de 50 × 50 mm. Determine la longitud *l* de las dos piezas exteriores de madera que darán el mismo factor de seguridad que el diseño original.

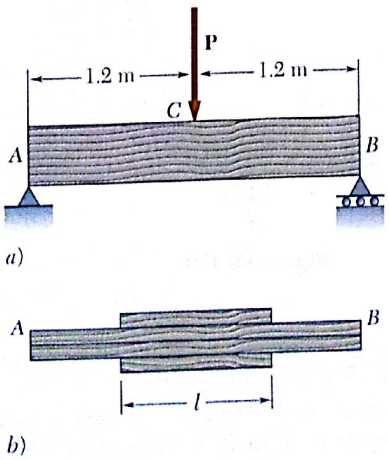


Figura P5.134

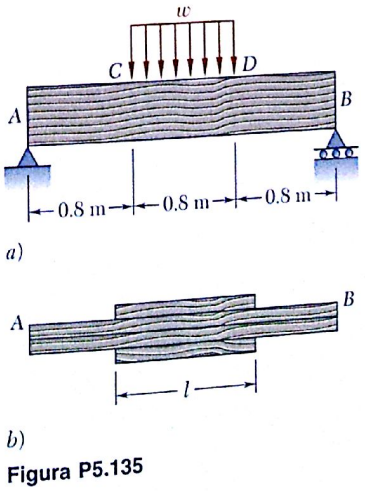


Figura P5.135

Generated by CamScanner from intsig.com

***5.136* y 5.137** Un elemento de máquina hecho de aluminio colado, con la forma de un sólido de revolución de diámetro variable d, está diseñado para soportar la carga que se muestra en la figura. Si se sabe que el elemento de máquina debe ser de resistencia constante, exprese d en términos de x, L y d_0.

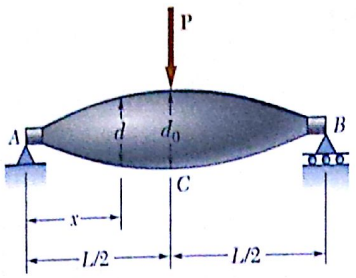


Figura *P5.136*

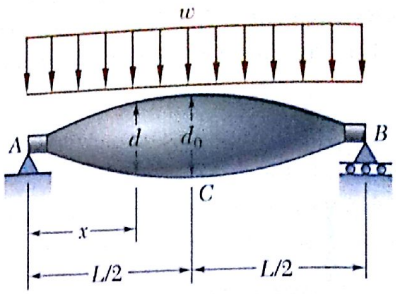


Figura P5.137

5.138 Una viga en voladizo AB, que consiste en una placa de acero de espesor uniforme h y ancho variable b, debe soportar una carga concentrada **P** en el punto A. *a*) Si se sabe que la viga debe ser de resistencia constante, exprese b en términos de x, L y b_0. *b*) Determine el mínimo valor permisible de h si $L = 300$ mm, $b_0 = 375$ mm, $P = 14.4$ kN y $\sigma_{perm} = 160$ MPa.

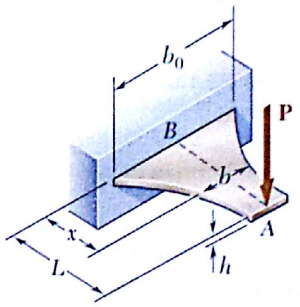


Figura P5.138

5.139 Una fuerza transversal **P** se aplica como se muestra en la figura en el extremo A del elemento cónico ahusado AB. Si d_0 es el diámetro del elemento en A, muestre que el máximo esfuerzo normal ocurre en el punto H, el cual está contenido en una sección transversal de diámetro $d = 1.5\, d_0$.

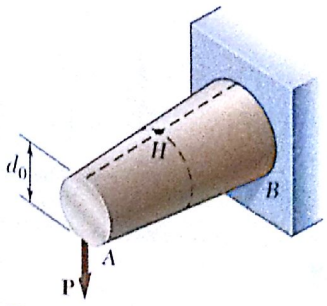


Figura P5.139

5.140 Si supone que la longitud y el ancho de las placas utilizadas en la viga del problema modelo 5.12 son, respectivamente, $l = 4$ m y $b = 285$ mm, y recuerda que el espesor de cada placa es de 16 mm, determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de D.

Generated by CamScanner from intsig.com

5.141 Dos placas, cada una con un espesor de $\frac{1}{2}$ in., se sueldan a una viga W27 × 84 como se muestra en la figura. Si $l = 10$ ft y $b = 10.5$ in., determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de *D*.

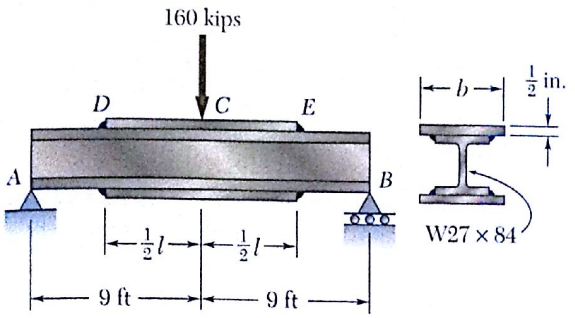


Figura *P5.141* y P5.142

5.142 Dos placas, cada una con un espesor de $\frac{1}{2}$ in., se sueldan a una viga W27 × 84 como se muestra en la figura. Si se sabe que $\sigma_{perm} = 24$ ksi tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido para *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

5.143 Si se sabe que $\sigma_{perm} = 150$ MPa, determine la máxima carga concentrada **P** que puede aplicarse en el extremo *E* de la viga que se muestra en la figura.

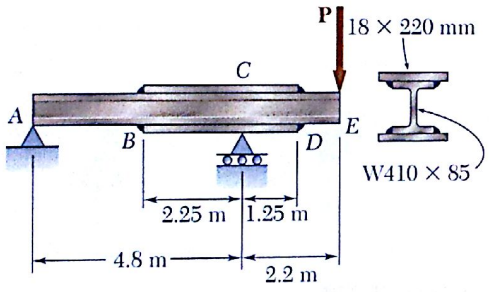


Figura P5.143

5.144 Dos placas, cada una de 7.5 mm de espesor, se sueldan a una viga W460 × 74 como se muestra en la figura. Si $l = 5$ m y $b = 200$ mm, determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de *D*.

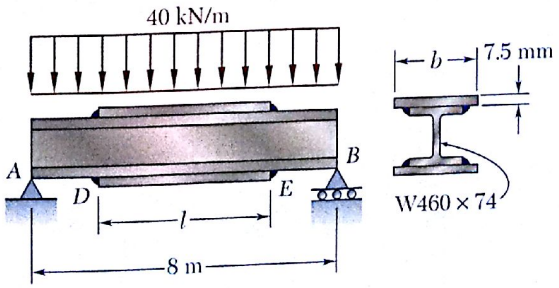


Figura P5.144 y P5.145

5.145 Dos placas, cada una de 7.5 mm de espesor, se sueldan a una viga W460 × 74 como se muestra en la figura. Si se sabe que $\sigma_{perm} = 150$ MPa tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido para *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

Generated by CamScanner from intsig.com

5.146 Dos placas, cada una con un espesor de $\frac{5}{8}$ in., se sueldan a una viga W30 × 99 como se muestra en la figura. Si se sabe que $l = 9$ ft y $b = 12$ in., determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de *D*.

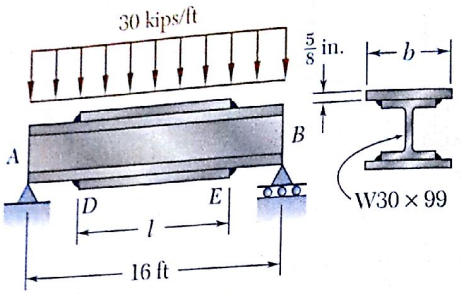


Figura P5.146 y *P5.147*

5.147 Dos placas, cada una con un espesor de $\frac{5}{8}$ in., se sueldan a una viga W30 × 99 como se muestra en la figura. Si se sabe que $\sigma_{perm} = 22$ ksi tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido para *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

5.148 Para la viga ahusada que se muestra en la figura, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) la máxima carga distribuida *w* que puede aplicarse, si se sabe que $\sigma_{perm} = 24$ ksi.

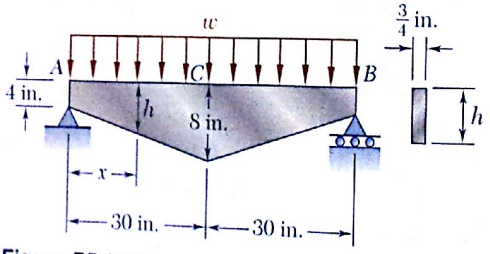


Figura P5.148

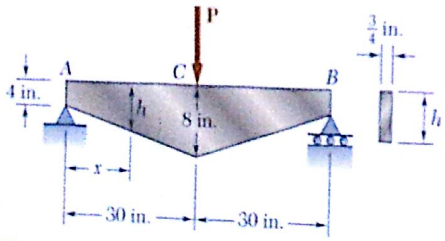


Figura P5.149

5.149 Para la viga ahusada que se muestra en la figura, determine *a*) la sección transversal en donde ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) la máxima carga concentrada **P** que puede aplicarse, si se sabe que $\sigma_{perm} = 24$ ksi.

5.150 Para la viga ahusada que se muestra en la figura, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) la máxima carga distribuida *w* que puede aplicarse, si se sabe que $\sigma_{perm} = 140$ MPa.

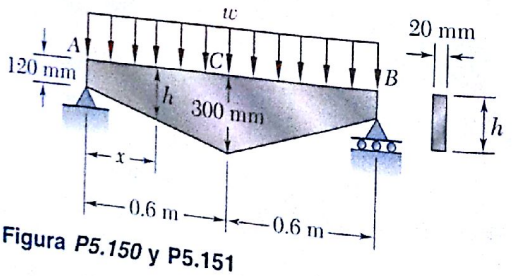


Figura *P5.150* y P5.151

5.151 Para la viga ahusada que se muestra en la figura, y sabiendo que $w = 160$ kN/m, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) el valor correspondiente del esfuerzo normal.

Generated by CamScanner from intsig.com

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 5

Este capítulo se dedicó al análisis y diseño de vigas sometidas a cargas transversales. Tales cargas pueden consistir en cargas concentradas o en cargas distribuidas y las vigas mismas se clasifican de acuerdo a la manera en que están apoyadas (figura 5.3). Solamente se consideraron vigas *estáticamente determinadas* en este capítulo; el análisis de vigas estáticamente indeterminadas se postergará hasta el capítulo 9.

Consideraciones para el diseño de vigas prismáticas

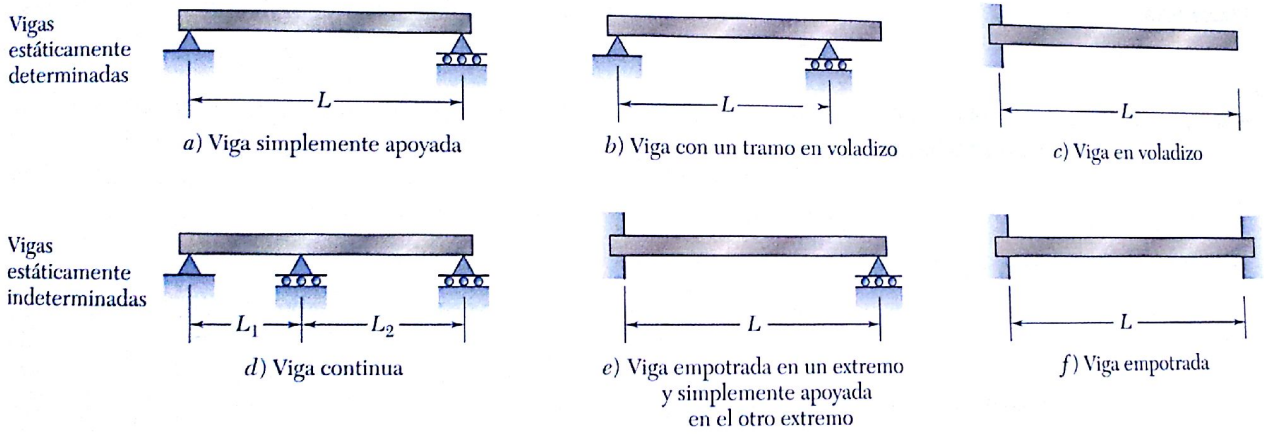


Figura 5.3

Esfuerzos normales debidos a la flexión

A pesar de que las cargas transversales causan tanto flexión como cortante en una viga, los esfuerzos normales causados por la flexión son el criterio dominante en el diseño de una viga por resistencia [véase sección 5.1]. Por tanto, este capítulo trató únicamente con la determinación de los esfuerzos normales en una viga, mientras que el efecto de los esfuerzos de cortante se examina en el siguiente.

Se recordó, de la sección 4.4, la fórmula de flexión para la determinación del valor máximo σ_m del esfuerzo normal en una sección dada de la viga,

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} \tag{5.1}$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje centroidal perpendicular al plano del par flector **M** y c es la máxima distancia desde la superficie neutra (figura 4.13). También se recordó de

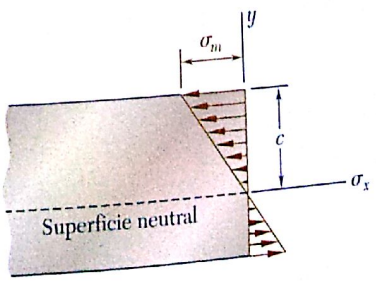


Figura 4.13

Generated by CamScanner from intsig.com

la sección 4.4 que, al introducir el módulo de sección elástico $S = I/c$ de la viga, el valor máximo σ_m del esfuerzo normal en la sección se expresa como

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} \tag{5.3}$$

Diagramas de cortante y de momento flector

Se sigue de la ecuación (5.1) que el esfuerzo normal máximo se produce en la sección donde $|M|$ sea máximo, en el punto más lejano del eje neutro. La determinación del máximo valor de $|M|$ y de la sección crítica de la viga en la que ocurre se simplifica mucho si se dibuja un *diagrama de cortante* y un *diagrama de momento flector*. Estos diagramas representan, respectivamente, la variación del cortante y del momento flector a lo largo de la viga y se obtuvieron determinando los valores de V y de M en puntos selectos de la viga [véase sección 5.2]. Estos valores se encontraron efectuando un corte a través del punto donde debían ser determinados y dibujando el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de las porciones de la viga obtenidas de esta manera. Para evitar cualquier confusión con respecto al sentido de la fuerza cortante **V** y del momento flector **M** (que actúan en sentidos opuestos en las dos porciones de la viga), se siguió la convención de signos adoptada anteriormente en el texto y que se ilustra en la figura 5.7*a* [véase ejemplos 5.01 y 5.02, problemas modelo 5.1 y 5.2].

a) Fuerzas internas (cortante positivo y momento flector positivo)

Figura 5.7*a*

Relaciones entre la carga, el cortante y el momento flector

La construcción de los diagramas de cortante y de momento flector se facilita si se toman en cuenta las siguientes relaciones [véase sección 5.3]. Denotando por w la carga distribuida por unidad de longitud (supuestamente positiva si se dirige hacia abajo), se escribió

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad \frac{dM}{dx} = V \tag{5.5, 5.7}$$

o, en forma integrada,

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{5.6'}$$
$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de corte entre } C \text{ y } D \tag{5.8'}$$

La ecuación (5.6′) hace posible dibujar el diagrama de cortante de una viga de la curva que representa la carga distribuida en dicha viga y el valor de V en un extremo de la viga. De manera análoga, la ecuación (5.8′) permite dibujar el diagrama de momento flector del diagrama de cortante y del valor de M en un extremo de la viga. Sin embargo, las cargas concentradas introducen discontinuidades en el diagrama de cortante y los pares concentrados en el diagrama de momento flector, ninguno de los cuales se considera por estas ecuaciones [véase problemas modelo 5.3 y 5.6]. Finalmente, se advirtió, de la ecuación (5.7), que los puntos de la viga donde el momento flector es máximo o mínimo son también los puntos donde el corte es cero [véase problema modelo 5.4].

Generated by CamScanner from intsig.com

Diseño de vigas prismáticas

El procedimiento apropiado para el diseño de una viga prismática se describió en la sección 5.4 y se resume aquí:

Habiendo determinado σ_{perm} para el material empleado y suponiendo que el diseño de la viga se controla por el esfuerzo normal máximo en la viga, se calcula el mínimo valor permisible del módulo de sección:

$$S_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{perm}} \tag{5.9}$$

Para una viga de madera de sección transversal rectangular, $S = \frac{1}{6}bh^2$, donde b es el ancho de la viga y h su espesor. Las dimensiones de la sección, por lo tanto, deben seleccionarse de tal manera que $\frac{1}{6}bh^2 \geq S_{mín}$.

Para una viga de acero laminado, consulte la tabla apropiada en el apéndice C. De los perfiles disponibles, considere sólo aquellos cuyo módulo de sección $S \geq S_{mín}$ y seleccione, de este grupo, la sección con el mínimo peso por unidad de longitud. Ésta será la más económica de las secciones para las que $S \geq S_{mín}$.

Funciones de singularidad

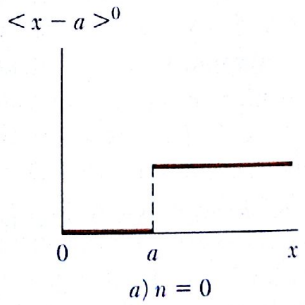
En la sección 5.5 se explicó un método alterno para la determinación de los máximos valores para el cortante y para el momento flector basado en el uso de las *funciones de singularidad* $\langle x - a\rangle^n$. Por definición, y para $n \geq 0$, se tiene

$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \tag{5.14}$$

Se señaló que cuando la cantidad entre los corchetes sea positiva o cero, los corchetes deberán reemplazarse por paréntesis ordinarios; en cambio, cuando la cantidad sea negativa, los corchetes mismos serán iguales a cero. También se estudió que las funciones de singularidad pueden integrarse y derivarse como binomios ordinarios. Por último, se observó que la función de singularidad correspondiente a $n = 0$ es discontinua en $x = a$ (figura 5.18*a*). Esta función se denominó como la *función escalón*. Se escribió

Función escalón

$$\langle x - a\rangle^0 = \begin{cases} 1 \text{ cuando } x \geq a \\ 0 \text{ cuando } x < a \end{cases} \tag{5.15}$$



a) $n = 0$

Figura 5.18*a*

Generated by CamScanner from intsig.com

Uso de las funciones de singularidad para expresar el corte y el momento flector

El uso de las funciones de singularidad hace posible representar el cortante o el momento flector en una viga por una expresión única, válida en cualquier punto de la viga. Por ejemplo, la contribución al cortante de la carga concentrada **P** aplicada en el punto medio C de una viga simplemente apoyada (figura 5.8) puede representarse por $-P\langle x - \frac{1}{2}L\rangle^0$, ya que esta expresión es igual a cero a la izquierda de C, y a $-P$ a la derecha de C. Sumando la contribución de la reacción $R_A = \frac{1}{2}P$ en A, se expresa el cortante en cualquier punto de la viga como

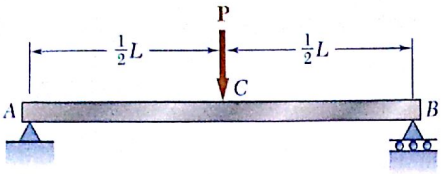


Figura 5.8

$$V(x) = \tfrac{1}{2}P - P\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^0$$

El momento flector se obtiene integrando esta expresión:

$$M(x) = \tfrac{1}{2}Px - P\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^1$$

Cargas abiertas equivalentes

Las funciones de singularidad que representan, respectivamente, la carga, el corte y el momento flector correspondientes a varias cargas básicas se presentan en la figura 5.19 en la página 346. Se explicó que una carga distribuida que no se extiende hasta el extremo derecho de la viga, o que es discontinua, deberá reemplazarse por una combinación equivalente de cargas abiertas. Por ejemplo, una carga uniformemente distribuida que se extienda desde $x = a$ hasta $x = b$ (figura 5.20) deberá expresarse como

$$w(x) = w_0\langle x - a\rangle^0 - w_0\langle x - b\rangle^0$$

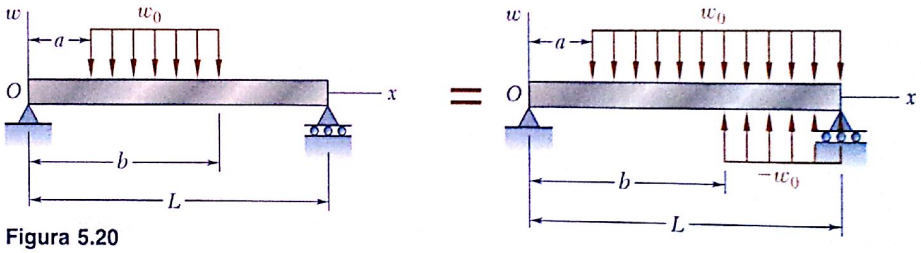


Figura 5.20

Vigas no prismáticas

La contribución de esta carga al cortante y al momento flector puede obtenerse mediante dos integraciones sucesivas. Sin embargo, deberá tenerse cuidado de incluir también en la expresión para $V(x)$ la contribución de las cargas concentradas y de las reacciones, y de incluir en la expresión para $M(x)$ la contribución de los pares concentrados [véase ejemplos 5.05 y 5.06, y problemas modelo 5.9 y 5.10]. También se observó que las funciones de singularidad se adaptan bien para usarse en computadoras.

Hasta ese punto el estudio se habrá concentrado en las vigas prismáticas, es decir, vigas con sección transversal uniforme. Por ello, en la sección 5.6 se inició el análisis del diseño de vigas no prismáticas, es decir, vigas con sección transversal variable. Se vio que al seleccionar la forma y el tamaño de la sección transversal de manera que su módulo de sección elástico $S = I/c$ variara a lo largo de la viga de la misma manera que el momento flector, pueden diseñarse vigas para las que σ_m en cada sección sea igual a σ_{perm}. En tales vigas, llamadas *vigas de resistencia constante*, el material rinde mejor que en las vigas prismáticas. Su módulo de sección en cualquier sección a lo largo de la viga se definió por la relación

Vigas de resistencia constante

$$S = \frac{M}{\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.18}$$

Generated by CamScanner from intsig.com

PROBLEMAS DE REPASO

5.152 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del cortante, *b*) del momento flector.

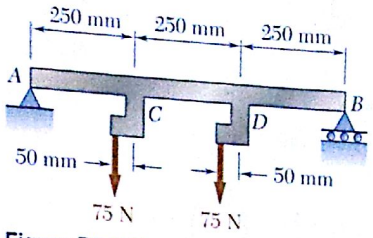


Figura P5.152

5.153 Determine *a*) la magnitud de la fuerza ascendente **P** para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente debido a la flexión (*Sugerencia*: Vea la sugerencia del problema 5.27.)

5.154 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del cortante, *b*) del momento flector.

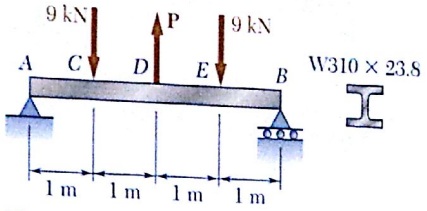


Figura *P5.153*

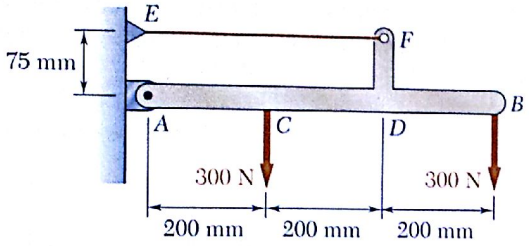


Figura P5.154

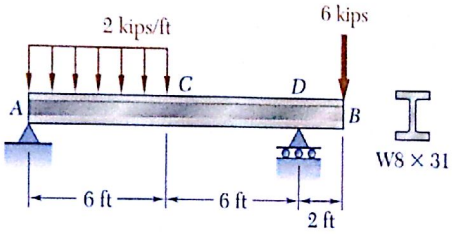


Figura P5.155

5.155 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo esfuerzo normal debido a la flexión.

5.156 La viga *AB*, de longitud *L* y sección transversal cuadrada con lado *a*, está apoyada en un pivote en *C* y soporta las cargas que se muestran en la figura. *a*) Verifique que la viga esté en equilibrio. *b*) Muestre que el esfuerzo normal máximo debido a la flexión ocurre en *C* y que es igual a $w_0L^2/(1.5a)^3$.

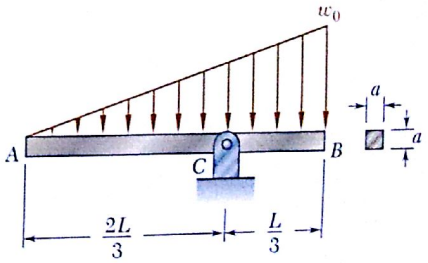


Figura P5.156

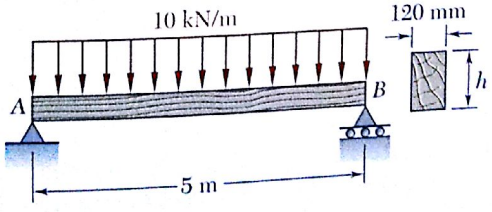


Figura *P5.157*

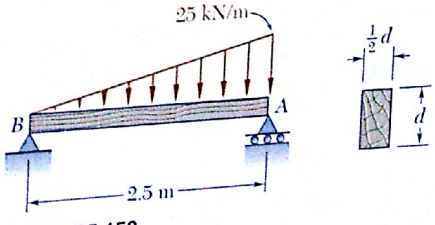


Figura P5.158

***5.157* y 5.158** Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, diseñe la sección transversal de la viga, si se sabe que el grado de madera utilizado tiene un esfuerzo normal permisible de 12 MPa.

Generated by CamScanner from intsig.com

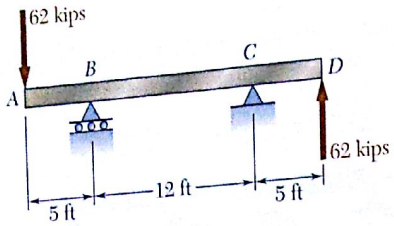


Figura *P5.159*

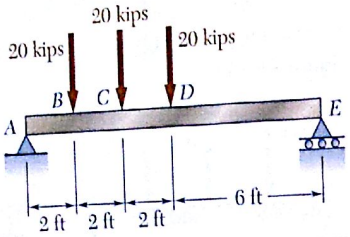


Figura P5.161

5.159 Si se sabe que el esfuerzo permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

5.160 Determine el máximo valor permisible de **P** para la viga y las cargas que se muestran en la figura, si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +80 MPa en tensión y de −140 MPa en compresión.

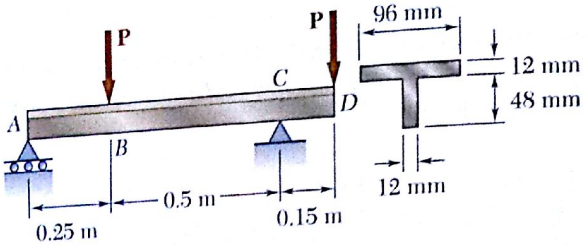


Figura P5.160

5.161 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Determine el máximo valor del momento flector en la viga.

5.162 La viga AB, que consiste en una placa de aluminio colado de espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga que se muestra en la figura. *a*) Si la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en términos de x, L y h_0 para la porción AC de la viga. *b*) Determine la máxima carga permisible si $L = 32$ in., $h_0 = 8$ in., $b = 1$ in. y $\sigma_{perm} = 10$ ksi.

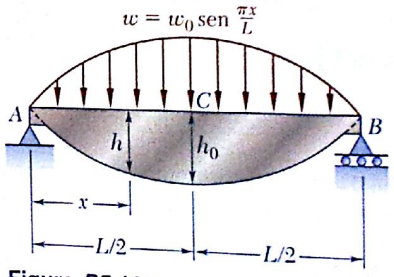


Figura *P5.162*

5.163 Una viga en voladizo AB, que consiste en una placa de acero de espesor uniforme h y ancho variable b, debe soportar una carga distribuida w a lo largo de su línea central AB. *a*) Si se sabe que la viga debe ser de resistencia constante, exprese b en términos de x, L y b_0. *b*) Determine el máximo valor permisible de w si $L = 15$ in., $b_0 = 8$ in., $h = 0.75$ in. y $\sigma_{perm} = 24$ ksi.

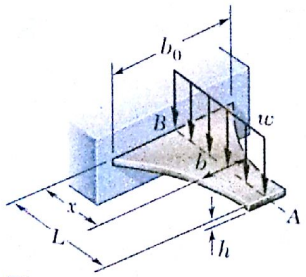


Figura P5.163

Generated by CamScanner from intsig.com